

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET

SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES,

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

SUR LA

THÉORIE DES FORMES

ET

SES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES,

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Par H. ANDOYER,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1898

AVERTISSEMENT.

La Théorie des Formes et ses applications géométriques occupent une place importante dans le programme des leçons de Mathématiques spéciales, pour l'Agrégation des Sciences mathématiques en 1898.

Aussi ai-je cru utile de publier les leçons que je fais cette année sur ce sujet aux candidats à l'Agrégation qui suivent les Conférences de la Sorbonne. La tâche m'a été d'autant plus facile que je prépare, depuis plusieurs années déjà, un Ouvrage assez considérable sur la *Théorie des Formes*, principalement au point de vue de ses applications à la Géométrie analytique.

Voulant offrir aux candidats toutes les ressources nécessaires pour qu'ils puissent composer sans peine les leçons qu'ils auront à faire devant le jury, j'ai développé d'une façon complète, quoique aussi élémentaire que possible, la théorie des invariants des formes binaires et ternaires, en me limitant pour les formes binaires à l'étude des formes des quatre premiers degrés et de la forme bilinéaire; pour les formes ternaires, à l'étude des formes linéaires, quadratiques et bilinéaires. Pour éviter les répétitions, et pour bien mettre en lumière les principes généraux, j'ai dû consacrer plusieurs pages à la théorie générale des formations invariantes. Je n'ai pas cru devoir insister sur les applications géométriques : on pourrait les multiplier pour ainsi dire indéfiniment, et j'aurais craint d'être trop long. Mais je crois en avoir dit assez pour rendre ces applications en quelque sorte immédiates, lorsqu'elles ne sortent pas du domaine auquel j'ai dû me limiter.

La terminologie que j'ai employée, et qui n'est pas, comme d'habitude, celle de la Géométrie ponctuelle, a précisément pour but, en ne spécifiant aucunement la nature des éléments géométriques que l'on peut envisager, de rendre plus faciles et plus générales les applications géométriques. J'espère que l'on estimera que cet avantage justifie suffisamment mon innovation.

H. Andoyer.

Paris, 25 mars 1898.

Leçons Élémentaires
sur la
Théorie des Formes
et ses applications géométriques.

Chapitre Premier.

Les Invariants des formes binaires.

§ 1. – Les formes binaires. Définitions et Généralités.

1 – Soient plusieurs séries de deux variables x_1 & x_2, y_1 & y_2, z_1 & z_2, ... ou simplement pour abréger (x), (y), (z), ... Une <u>forme binaire</u> est un polynôme entier et homogène séparément par rapport à diverses telles séries de deux variables. Si f est une telle forme, des degrés $p, q, r, \ldots$ respectivement par rapport aux variables $(x), (y), (z), \ldots$ nous écrirons :

$$f = a_{x^p y^q z^r \ldots} = \sum \frac{P_p . P_q . P_r \ldots}{P_{p_1} . P_{p_2} . P_{q_1} . P_{q_2} . P_{r_1} . P_{r_2} \ldots} a_{p_1 p_2 ; q_1 q_2 ; r_1 r_2 ; \ldots} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1} y_2^{q_2} z_1^{r_1} z_2^{r_2} \ldots\ldots,$$

les $p_1, p_2 ; q_1, q_2 ; \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls vérifiant les conditions $p_1 + p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$, ... et P_m désignant le produit $1.2.3\ldots m$,

Auto. J. Courtier Paris (11 [illegible]).

ou l'unité, quand m est nul.

Les quantités $a_{p_1, p_2; q_1, q_2; \ldots\ldots}$ sont les coefficients de la forme; dans leur ensemble, nous les désignerons par (a).

Un système binaire est un ensemble quelconque de formes binaires et de variables binaires, c'est-à-dire de variables telles que les (x), (y), ..., ces variables pouvant d'ailleurs figurer ou ne pas figurer en tout ou en partie dans les formes. Les éléments qui constituent véritablement le système sont, avec les variables isolées, les coefficients des formes : les autres variables qui peuvent figurer dans ces formes ne jouent qu'un rôle analogue à celui de la variable d'intégration dans une intégrale définie.

2. — Soit un coefficient de forme, tel que $a_{p_1, p_2; q_1 q_2; \ldots\ldots}$; les poids de ce coefficient par rapport aux indices 1 et 2 sont respectivement les sommes $p_1 + q_1 + \ldots$, $p_2 + q_2 + \ldots$. Les poids d'une variable telle que x_1 ou x_2 par rapport aux indices 1 et 2 sont respectivement -1 & 0, ou 0 & -1. Le poids d'un monôme, produit de coefficients et de variables, par rapport à l'indice 1 ou 2 est égal à la somme des poids de ses facteurs par rapport au même indice.

Une fonction entière dont tous les termes sont de même poids par rapport à l'indice 1 ou 2, est dite isobarique par rapport à cet indice; si elle est isobarique et de même poids par rapport à chacun des indices 1 et 2, elle est simplement dite isobarique.

La forme f, par exemple, est isobarique de poids zéro.

3. — Considérons une forme f comme ne dépendant que

d'une seule série de variables (x). On peut alors écrire, si la forme est de degré p par rapport à ces variables :

$$f = a_x{}^p = \sum \frac{P_p}{P_{p_1} \cdot P_{p_2}} a_{p_1 p_2} \, x_1^{p_1} x_2^{p_2}.$$

On sait que l'on peut mettre f sous la forme d'un produit de p facteurs linéaires

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2)(c_1 x_1 + c_2 x_2) \ldots (k_1 x_1 + k_2 x_2)(l_1 x_1 + l_2 x_2).$$

Les rapports $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \ldots$ et le produit $a_1 b_1 \ldots l_1$, sont d'ailleurs seuls complètement déterminés.

On a les relations :

$$\begin{aligned} a_1 b_1 c_1 \ldots k_1 l_1 &= a_{p,0}, \\ \Sigma \; a_2 b_1 c_1 \ldots k_1 l_1 &= p a_{p-1,1}, \\ \Sigma \; a_2 b_2 c_1 \ldots k_1 l_1 &= \frac{p(p-1)}{2} a_{p-2,2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma \; a_2 b_2 c_2 \ldots k_2 l_1 &= p a_{1,p-1}, \\ a_2 b_2 c_2 \ldots k_2 l_2 &= a_{0,p}. \end{aligned}$$

Les premiers membres de ces relations sont les fonctions symétriques fondamentales des $(a), (b), (c) \ldots$, où (a) représente ici l'ensemble a_1, a_2.

Toute fonction symétrique des $(a), (b), (c) \ldots$ entière et homogène de même degré m par rapport aux divers couples $(a), (b), (c), \ldots$ peut s'exprimer en fonction entière des fonctions symétriques fondamentales et par suite des coefficients a_{p_1, p_2} de la forme.

Une telle fonction est en effet une somme de fonctions

symétriques simples telles que:

$$S = \Sigma\, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \ldots\ldots l_1^{\lambda_1} l_2^{\lambda_2},$$

où l'on a: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \ldots\ldots = \lambda_1 + \lambda_2 = m.$

Supposons que l'on ait choisi le terme type de façon que:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \gamma_1 \ldots\ldots \leqq \varkappa_1 \leqq \lambda_1\,,$$

et considérons la fonction symétrique:

$$S_0 = (a_1 b_1 \ldots\ldots l_1)^{\alpha_1} (\Sigma\, a_2 b_1 \ldots\ldots l_1)^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots\ldots (\Sigma a_2 b_2 \ldots k_2 l_1)^{\lambda_1 - \varkappa_1}$$
$$(a_2 b_2 \ldots\ldots k_2 l_2)^{m - \lambda_1};$$

la différence $S - S_0$ est une somme de nouvelles fonctions symétriques simples telles que:

$$S' = \Sigma\, a_1^{\alpha'_1} a_2^{\alpha'_2} b_1^{\beta'_1} b_2^{\beta'_2} \ldots\ldots l_1^{\lambda'_1} l_2^{\lambda'_2},$$

les exposants vérifiant les conditions:

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 = \beta'_1 + \beta'_2 = \ldots = \lambda'_1 + \lambda'_2 = m\,,$$
$$\alpha'_1 + \beta'_1 + \ldots + \lambda'_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \ldots\ldots + \lambda_1\,,$$
$$\alpha'_2 + \beta'_2 + \ldots + \lambda'_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \ldots\ldots + \lambda_2\,.$$

Si l'on suppose encore:

$$\alpha'_1 \leqq \beta'_1 \leqq \gamma'_1 \ldots \leqq \lambda'_1\,,$$

on a nécessairement $\alpha'_1 \geqq \alpha_1$, grâce à la façon dont on a choisi S_0; si l'égalité a lieu, on a de même $\beta'_1 \geqq \beta_1$; si l'égalité a encore lieu, on a $\gamma'_1 \geqq \gamma_1$ et ainsi de suite, de façon à rencontrer forcément une inégalité. Alors, on voit immédiatement qu'en continuant l'application de la même méthode, on est toujours ramené finalement aux fonctions symétriques fondamentales.

La fonction S est homogène et de degré m par rapport aux coefficients de f; en outre la façon même dont elle a été calculée montre qu'elle est isobarique par rapport à chacun des indices 1 et 2,

et des poids respectifs :

$$\alpha_1+\beta_1+\ldots\ldots+\lambda_1\ ,\quad \alpha_2+\beta_2+\ldots\ldots+\lambda_2 .$$

4. — Si f est une forme quelconque dépendant en particulier des variables (x) et d'ordre p par rapport à ces variables, sa <u>polaire</u> d'ordre h relative aux variables (x) remplacées par de nouvelles variables (y) est :

$$D^h_{xy} f = \frac{P_{p-h}}{P_p}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^h ,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique, c'est-à-dire que dans son développement, le produit $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{h_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{h_2}$, où $h_1+h_2=h$ doit être remplacé par $\frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h_1}\partial x_2^{h_2}}$.

Pour $h=0$, la polaire est la forme elle-même ; pour $h=p$ la polaire est la forme f où l'on a remplacé les (x) par les (y) ; pour $h>p$, la polaire est nulle identiquement.

En général, le degré de la polaire par rapport aux (x) est diminué de h et devient $p-h$; son degré par rapport aux (y) est augmenté de h et est simplement h, si la forme f est indépendante des (y).

Les polaires des polaires de f sont les <u>polaires doubles</u> de f ; et ainsi de suite. On a évidemment :

$$D^k_{xy}\left(D^h_{xy}f\right)=D^h_{xy}\left(D^k_{xy}f\right)=D^{h+k}_{xy}f.$$

Plus généralement, on a :

$$D^k_{zt}\left(D^h_{xy}f\right)=D^h_{xy}\left(D^k_{zt}f\right)$$

sous la condition que les variables (x) et (t) soient distinctes, ainsi que les variables (y) et (z).

Si l'on a:

$$f = a_{x^p y^q z^r t^s} \cdots,$$

nous écrivons:

$$D^k_{zt}\left(D^h_{xy} f\right) = a_{x^{p-h} y^{q+h} z^{r-k} t^{s+k}} \cdots,$$

à condition toutefois qu'il n'en résulte aucune ambiguïté, ce qui revient à supposer que l'on peut intervertir l'ordre des symboles D.

Ainsi, partant de la forme quadratique:

$$a_{x^2} = a_{20} x_1^2 + 2 a_{11} x_1 x_2 + a_{02} x_2^2,$$

on a la polaire

$$a_{xy} = a_{20} x_1 y_1 + a_{11}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{02} x_2 y_2;$$

partant de la forme bilinéaire:

$$a_{xy} = a_{10,10} x_1 y_1 + a_{10,01} x_1 y_2 + a_{01,10} x_2 y_1 + a_{01,01} x_2 y_2,$$

on a la polaire

$$a_{x^2} = a_{10,10} x_1^2 + (a_{10,01} + a_{01,10}) x_1 x_2 + a_{01,01} x_2^2.$$

---

§ 2. – Les substitutions linéaires.

---

5. – Considérons un système binaire quelconque S, et faisons sur les variables $(x), (y) \ldots$, qui composent ce système ou qui figurent dans les formes de ce système, une substitution linéaire σ de façon à introduire de nouvelles variables $(x'), (y') \ldots$ définies par les relations:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2 \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \lambda_{11} y'_1 + \lambda_{12} y'_2 \\ y_2 = \lambda_{21} y'_1 + \lambda_{22} y'_2 \end{cases}, \ldots\ldots$$

Le déterminant $\delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$ de la substitution est supposé essentiellement différent de zéro, de façon que l'on puisse écrire

inversement :

$$\begin{cases} \delta x'_1 = \lambda_{22}\, x_1 - \lambda_{12}\, x_2 \\ \delta x'_2 = -\lambda_{21}\, x_1 + \lambda_{11}\, x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta y'_1 = \lambda_{22}\, y_1 - \lambda_{12}\, y_2 \\ \delta y'_2 = -\lambda_{21}\, y_1 + \lambda_{11}\, y_2 \end{cases}, \quad \ldots$$

Par cette substitution, chaque forme f devient une nouvelle forme f', aux variables (x'), (y')...; le système S composé de variables (x), (y),... et de formes f, g,.... se transforme en un nouveau système S' composé des variables (x'), (y'),... et des nouvelles formes f', g'....

Il est évident que les nouvelles formes f', g',... sont respectivement des mêmes degrés, par rapport aux diverses séries de variables nouvelles, que les anciennes formes f, g,.... par rapport aux séries correspondantes de variables anciennes. Donc, si l'on avait $f = a_{x^p y^q \ldots}$, nous aurons : $f' = a'_{x'^p y'^q} \ldots\ldots$

Les relations entre les coefficients de deux formes transformées l'une de l'autre sont faciles à trouver. On a

$$f' = f(\lambda_{11}\, x'_1 + \lambda_{12}\, x'_2 ,\ \lambda_{21}\, x'_1 + \lambda_{22}\, x'_2 ;\ \ldots\ );$$

si donc $(\bar{x})$, $(\bar{y})$,... désignent de nouvelles variables ne figurant pas dans f et si l'on envisage la polaire multiple

$$a_{x^{p_1} \bar{x}^{p_2} y^{q_1} \bar{y}^{q_2} \ldots}\ ,$$

où $p_1 + p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$ ..., le coefficient $a'_{p_1, p_2 ; q_1 q_2 ; \ldots}$ est évidemment égal à la valeur de cette polaire lorsqu'on y fait

$$x_1 = y_1 = \ldots = \lambda_{11}, \quad \bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \ldots = \lambda_{12},$$
$$x_2 = y_2 = \ldots = \lambda_{21}, \quad \bar{x}_2 = \bar{y}_2 = \ldots = \lambda_{22}.$$

Les (a) s'expriment aussi facilement à l'aide des (a').

Si le système S est constitué par n couples de variables et par des formes dont les coefficients sont en nombre total N, nous avons ainsi $P = 2n + N$ relations distinctes entre les P éléments constitutifs

du système S et les P éléments correspondants du système transformé S'; ces P relations dépendent des quatre coefficients (λ) de la substitution σ.

6. – Considérons les équations qui servent à exprimer les éléments du système transformé S' en fonction des anciens éléments et des coefficients (λ) : on a ainsi un système de P <u>équations de transformation</u> pour les éléments du système S, dépendant des quatre paramètres (λ). Ces équations sont linéaires par rapport aux P anciens éléments, et si on les met sous forme entière, le déterminant des coefficients de ces P anciens éléments est une fonction des (λ), qui est nécessairement une puissance de δ, puisque inversement on peut exprimer les anciens éléments à l'aide des nouveaux quand δ n'est pas nul, et que δ est un polynôme irréductible : au surplus, c'est là un fait facile à vérifier directement.

Si l'on considère les coefficients (λ) comme pouvant prendre toutes les valeurs possibles (δ n'étant pas nul), nous avons ainsi un ensemble quadruplement infini de transformations, ou encore un ensemble de transformations à quatre paramètres <u>essentiels</u> ; en outre cet ensemble est évidemment continu.

Cet ensemble de transformations forme un <u>groupe</u>; c'est-à-dire que si l'on fait deux transformations consécutives, définies par des formules telles que

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2 \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2 \ldots, \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_1 = \mu_{11} x''_1 + \mu_{12} x''_2 \\ x'_2 = \mu_{21} x''_1 + \mu_{22} x''_2, \ldots\ldots, \end{cases}$$

qui à partir du système S conduisent successivement aux systèmes S' et S'', on peut passer directement du système S au système S'' par

une transformation appartenant à l'ensemble. En effet, les formules précédentes donnent

$$\begin{cases} x_1 = (\lambda_{11}\mu_{11} + \lambda_{12}\mu_{21})\, x_1'' + (\lambda_{11}\mu_{12} + \lambda_{12}\mu_{22})\, x_2'' \\ x_2 = (\lambda_{21}\mu_{11} + \lambda_{22}\mu_{21})\, x_1'' + (\lambda_{21}\mu_{12} + \lambda_{22}\mu_{22})\, x_2'', \end{cases}$$

et l'on voit que l'on est ramené pour passer de S à S'' à faire usage d'une substitution linéaire analogue à σ dont le déterminant est d'ailleurs le produit des déterminants des substitutions intermédiaires.

Ce groupe à quatre paramètres est fini et continu, au sens de M.r S. Lie. Il contient en particulier la transformation identique, qui laisse tous les éléments inchangés : il suffit de faire $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$. Enfin, les transformations du groupe sont inverses deux à deux, car après avoir passé de S à S', on peut passer de S' à S, en remplaçant $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ par $\frac{\lambda_{22}}{\delta}, -\frac{\lambda_{12}}{\delta}, -\frac{\lambda_{21}}{\delta}, \frac{\lambda_{11}}{\delta}$.

Telles sont les propriétés fondamentales des substitutions linéaires ; elles ne leur sont pas particulières, mais ce sont elles qui constituent le fondement de leur théorie.

---

§ 3. – Les invariants absolus.

---

7. – Désignons par $e_1, \ldots e_i \ldots e_p$ ou simplement par (e) l'ensemble des éléments qui constituent le système S, et de même par (e') l'ensemble des éléments du système transformé S'. Les équations de transformation sont de la forme

$$e_i' = f_i\,(e, \lambda)$$

en nombre P, les f_i étant linéaires par rapport aux (e), rationnels

par rapport aux (λ), avec le seul dénominateur δ possible.

Considérons la matrice M :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{11}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{21}} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_{11}} & \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_{12}} & \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_{21}} & \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_P}{\partial \lambda_{11}} & \frac{\partial f_P}{\partial \lambda_{22}} & \frac{\partial f_P}{\partial \lambda_{21}} & \frac{\partial f_P}{\partial \lambda_{22}} \end{matrix} \right\|$$

et supposons que les déterminants d'ordre p $(p \leqslant 4)$ tirés de cette matrice ne soient pas tous nuls, tandis que (si $p < 4$), les déterminants analogues d'ordre $p+1$ sont tous identiquement nuls : sauf des cas très particuliers, p sera égal à 4.

Alors, comme l'on sait, l'élimination des (λ) entre les équations de transformation conduit à $P-p$ relations distinctes entre les (e') et les (e) ; ces relations peuvent être supposées résolues par rapport à autant d'éléments (e') convenablement choisis, et écrites sous la forme

$$e'_i = \varphi_i\,(e, e'_1, e'_2 \ldots e'_p) \qquad (i > p) ;$$

les φ_i sont des fonctions algébriques distinctes.

Ceci posé, imaginons qu'à l'aide d'une nouvelle substitution linéaire, on passe des (e') aux (e'') comme précédemment, on aura alors des relations telles que

$$e''_i = \varphi_i\,(e' ; e''_1, e''_2, \ldots e''_p) ;$$

d'autre part, puisqu'on peut passer directement des (e) aux (e'') à

l'aide d'une substitution linéaire, on a aussi

$$e''_i = \varphi_i\,(e\,; e''_1, e''_2, \ldots, e''_p),$$

et par suite

$$\varphi_i\,(e'\,; e''_1, e''_2 \ldots e''_p) = \varphi_i(e; e''_1, e''_2 \ldots e''_p) \quad (i > p),$$

et cela quelles que soient les valeurs attribuées à $e''_1, e''_2, \ldots e''_p$. Les $P-p$ relations distinctes qui lient les (e') aux (e) peuvent donc être mises sous une forme particulièrement intéressante qui montre l'existence de $P-p$ fonctions $\varphi_i(e)$ qui ne changent pas de valeur quand on y remplace les (e) par les (e').

Si, d'une façon générale, nous appelons invariant absolu du système S toute fonction F des éléments (e) qui ne change pas de valeur quand on y remplace les (e) par les (e'), c'est-à-dire encore telle que la relation

$$F(e') = F(e)$$

devienne une identité quand on y remplace les (e') par leurs expressions en fonction des (e) et des (λ), nous voyons que les $P-p$ relations distinctes qui lient entre eux les (e) et les (e') sont exprimées par l'existence de $P-p$ invariants absolus distincts que l'on peut former comme nous venons de le dire.

Toute fonction de ces invariants absolus est elle même un invariant absolu; et réciproquement, si l'on imagine un invariant absolu quelconque, il est nécessairement une fonction de ceux que nous venons de former, puisque, dans le cas contraire, il établirait entre les (e) et les (e') une nouvelle relation distincte de celles déjà établies, ce qui est impossible.

8. — L'étude des invariants absolus d'un système binaire S est particulièrement importante; pour les connaître tous, il suffit, d'après ce qui précède, d'en connaître $P-p$, qui soient distincts, puisque tous les autres sont fonctions de ceux-là. Nous avons appris à en former un tel nombre qui sont algébriques; soit φ_i l'un d'entre eux; si φ_i est susceptible de prendre k valeurs, il est racine d'une équation de degré k dont le premier terme est φ_i^k et dans laquelle les autres puissances de φ_i ont pour coefficients des fonctions rationnelles des (e) qui sont évidemment, elles aussi, des invariants absolus. On peut donc toujours former un système de $P-p$ invariants absolus distincts, qui soient <u>rationnels</u> par rapport aux (e). Les invariants absolus que nous considérerons seront toujours dans ce cas.

Tout ceci suppose $P>p$; dans le cas contraire, il n'y a aucun invariant absolu.

9. — Il est facile de prévoir que les invariants absolus d'un système S, considérés comme fonctions des éléments de ce système, doivent vérifier un système de p équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles, formant un <u>système complet</u>, puisque ce sont des fonctions arbitraires de $P-p$ quelconques d'entre eux, distincts.

Nous allons former ces équations aux dérivées partielles en cherchant directement les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $F(e)$ des éléments du système S soit un invariant absolu de ce système. Toute substitution linéaire σ peut être obtenue en combinant ensemble un certain nombre de substitutions des formes suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = h x'_1 \\ x_1 = x'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + k x'_2 \\ x_2 = x'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = l x'_1 + x'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = m x'_2 . \end{cases}$$

Si en effet on a $\lambda_{22} \neq 0$, en faisant

$$\begin{cases} x_1 = x''_1 + \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} x''_2 \\ x_2 = x''_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x''_1 = \dfrac{\delta}{\lambda_{22}} x'''_1 \\ x''_2 = x'''_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x'''_1 = x^{IV}_1 \\ x'''_2 = \lambda_{22} x^{IV}_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^{IV}_1 = x'_1 \\ x^{IV}_2 = \dfrac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} x'_1 + x'_2 , \end{cases}$$

on a

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2 , \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2 . \end{cases}$$

Si $\lambda_{22} = 0$, on est ramené au cas précédent, en faisant d'abord

$$\begin{cases} x^{V}_1 = x'_1 + k x'_2 \\ x^{V}_2 = x'_2 , \end{cases}$$

k étant une quantité quelconque non nulle, ce qui donne en effet

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x^{V}_1 + (\lambda_{12} - \lambda_{11} k) x^{V}_2 , \\ x_2 = \lambda_{21} x^{V}_1 - \lambda_{21} k\, x^{V}_2 ; \end{cases}$$

il suffira donc d'opérer sur cette dernière substitution comme plus haut, en remplaçant les (x') par les (x^{V}).

Il résulte de ce que nous venons de dire que la condition nécessaire et suffisante pour que $F(C)$ soit un invariant absolu, est que cette fonction ne change pas de valeur quand on fait l'une quelconque des substitutions particulières que nous venons de signaler, et que nous écrirons sous la forme :

$$(\sigma_{11}) \begin{cases} x_1 = x'_1 e^{\omega_{11}} \\ x_2 = x'_2 \end{cases}, \quad (\sigma_{12}) \begin{cases} x_1 = x'_1 + \omega_{12} x'_2 \\ x_2 = x'_2 \end{cases}, \quad (\sigma_{21}) \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = \omega_{21} x'_1 + x'_2 , \end{cases} \quad (\sigma_{22}) \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = x'_2 e^{\omega_{22}} , \end{cases}$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

Chacune de ces substitutions définit un groupe à un seul paramètre comme on le voit tout de suite, si ω_{ij} est infiniment petit, la substitution σ_{ij} est <u>infinitésimale</u>, en ce sens qu'elle modifie les (e) de quantités infiniment petites. Le groupe des substitutions (σ) à quatre paramètres contient ainsi quatre substitutions infinitésimales indépendantes, qui sont les substitutions infinitésimales σ_{ij}.

Envisageons d'abord la substitution σ_{11}. Elle donne

$$x'_1 = x_1 e^{-\omega_{11}}, \qquad x'_2 = x_2, \dots$$

$$a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots} = e^{(p_1+q_1+\dots)\omega_{11}} a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots}$$

Donc

$$F(e') = F(x_1 e^{-\omega_{11}}, x_2; y_1 e^{-\omega_{11}}, y_2; \dots e^{(p_1+q_1+\dots)\omega_{11}} a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots}, \dots),$$

d'où

$$\frac{dF(e')}{d\omega_{11}} = -x'_1 \frac{\partial F}{\partial x'_1} - y'_1 \frac{\partial F}{\partial y'_1} - \dots + (p_1+q_1+\dots) a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots} \times \frac{\partial F}{\partial a'_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots}} + \dots$$

Cette dérivée est encore une fonction des seuls (e').

Si alors nous désignons par $\Delta_{11} F(e)$ l'expression

$$-x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - \dots + (p_1+q_1+\dots) a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1,p_2;q_1,q_2;\dots}} + \dots,$$

on aura, par la formule de Mac-Laurin,

$$F(e') = F(e) + \omega_{11} \Delta_{11} F(e) + \frac{\omega_{11}^2}{1.2} \Delta_{11}^2 F(e) + \frac{\omega_{11}^3}{1.2.3} \Delta_{11}^3 F(e) + \dots,$$

où $\Delta_{11}^2 F$ désigne $\Delta_{11}(\Delta_{11} F)$, et ainsi de suite.

La condition nécessaire et suffisante pour que F(e) soit un

invariant absolu pour les substitutions σ_{11} est donc

$$\Delta_{11} F(e) = 0.$$

La substitution σ_{12} donne de même

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 - \omega_{12} x_2, \\
x'_2 &= x_2 \qquad , \dots \\
a'_{p_1, p_2; q_1, q_2; \dots} &= a_{p_1, p_2; q_1, q_2; \dots} \\
&\quad + \omega_{12} \left[p_2 a_{p_1+1, p_2-1; q_1, q_2; \dots} + q_2 a_{p_1, p_2; q_1+1, q_2-1; \dots} + \dots \right] \\
&\quad + \frac{\omega_{12}^2}{1.2} \left[p_2 (p_2 - 1) a_{p_1+2, p_2-2; q_1, q_2; \dots} + \dots \right. \\
&\qquad \left. + 2 p_2 q_2 \, a_{p_1+1, p_2-1; q_1+1, q_2-1; \dots} + \dots \right] \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

la loi de formation étant évidente ; on en tire

$$\begin{aligned}
\frac{dF(e')}{d\omega_{12}} &= - x'_2 \frac{\partial F}{\partial x'_1} - y'_2 \frac{\partial F}{\partial y'_1} - \dots \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial a'_{p_1, p_2; q_1, q_2; \dots}} \left\{ p_2 a'_{p_1+1, p_2-1; q_1, q_2; \dots} + q_2 a'_{p_1, p_2; q_1+1, q_2-1; \dots} + \dots \right\} \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et cette dérivée est encore une fonction des seuls (e') de sorte qu'en posant

$$\begin{aligned}
\Delta_{12} F(e) &= - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} - \dots \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial a_{p_1, p_2; q_1, q_2; \dots}} \left(p_2 a_{p_1+1, p_2-1; q_1, q_2; \dots} + q_2 a_{p_1, p_2; q_1+1, q_2-1; \dots} + \dots \right) \\
&\quad + \dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

on a comme plus haut

$$F(e') = F(e) + \omega_{12} \Delta_{12} F(e) + \frac{\omega_{12}^2}{1.2} \Delta_{12}^2 F(e) + \frac{\omega_{12}^3}{1.2.3} \Delta_{12}^3 F(e) + \dots$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $F(e)$ soit un

invariant absolu pour les substitutions σ_{12} est donc

$$\Delta_{12} F(e) = 0.$$

De même en faisant

$$\Delta_{21} F(e) = -x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} - \cdots$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \cdots}} (p_1 a_{p_1-1, p_2+1; q_1, q_2; \cdots} + q_1 a_{p_1 p_2; q_1-1, q_2+1; \cdots} + \cdots$$

$$+ \cdots$$

$$\& \; \Delta_{22} F(e) = -x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - \cdots$$

$$+ (p_2 + q_2 + \cdots) a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \cdots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1 p_2; q_1 q_2 \cdots}} + \cdots ,$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que $F(e)$ soit un invariant absolu pour les substitutions σ_{21} et σ_{22} sont

$$\Delta_{21} F(e) = 0 \quad , \quad \Delta_{22} F(e) = 0 .$$

Si donc $F(e)$ est un invariant absolu pour toutes les substitutions σ, il faut et il suffit que F vérifie les quatre équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes

$$\Delta_{11} F = 0, \; \Delta_{12} F = 0, \; \Delta_{21} F = 0, \; \Delta_{22} F = 0 .$$

On peut remarquer d'ailleurs qu'il suffirait pour obtenir ces équations d'écrire que $F(e)$ est un invariant absolu pour les quatre substitutions infinitésimales σ_{ij}, ce qui serait facile à justifier a priori.

Les équations que nous venons de trouver se réduisent, d'après ce qui a été dit précédemment, à p distinctes qui forment un système complet et qui admettent $P - p$ solutions rationnelles distinctes.

En fait, on vérifie facilement les identités

$$\Delta_{11}\,\Delta_{22}\,F - \Delta_{22}\,\Delta_{11}\,F = 0,$$
$$\Delta_{12}\,\Delta_{21}\,F - \Delta_{21}\,\Delta_{12}\,F = \Delta_{11}F - \Delta_{22}F,$$
$$\Delta_{11}\,\Delta_{12}\,F - \Delta_{12}\,\Delta_{11}\,F = \Delta_{12}\,F,$$
$$\Delta_{11}\,\Delta_{21}\,F - \Delta_{21}\,\Delta_{11}\,F = -\Delta_{21}\,F,$$
$$\Delta_{22}\,\Delta_{12}\,F - \Delta_{12}\,\Delta_{22}\,F = -\Delta_{12}\,F,$$
$$\Delta_{22}\,\Delta_{21}\,F - \Delta_{21}\,\Delta_{22}\,F = \Delta_{21}\,F.$$

---

§ 4. – Les Invariants.

10. – Si $F(e)$ est un invariant absolu, rationnel et non entier, il pourra se mettre sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{F_1(e)}{F_2(e)}$, les fonctions F_1 et F_2 étant entières et n'étant pas, sauf exception, des invariants absolus. On a par hypothèse

$$\frac{F_1(e')}{F_2(e')} = \frac{F_1(e)}{F_2(e)};$$

$F_1(e')$ et $F_2(e')$ sont encore des fonctions entières des (e) quand on y remplace les (e') par leurs valeurs en fonction des (e) et des (λ); par suite, d'après les hypothèses faites, on a nécessairement

$$F_1(e') = \omega\, F_1(e), \quad F_2(e') = \omega\, F_2(e),$$

ω étant une fonction qui ne dépend que des (λ).

Nous sommes ainsi conduits à rechercher d'une façon plus générale toutes les fonctions $F(e)$ telles que l'on ait

$$F(e') = \omega\, F(e),$$

ω ne dépendant que des (λ). Ces fonctions sont les invariants du système S ; elles comprennent en particulier les invariants absolus, qui

correspondent à $\omega = 1$.

Comme précédemment, pour que $F(e)$ soit un invariant du système S, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi pour les substitutions σ_{ij}. Par suite, à cause des formules

$$F(e') = F(e) + \omega_{ij}\,\Delta_{ij}\,F(e) + \frac{\omega_{ij}^2}{1.2}\,\Delta_{ij}^2\,F(e) + \ldots,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\Delta_{ij}\,F(e) = \mu_{ij}\,F(e)\;;$$

μ_{ij} ne peut dépendre que de ω_{ij}, et par suite est constant, puisque F & $\Delta_{ij} F$ sont indépendants de ω_{ij}.

En se servant des valeurs données ci-dessus pour les expressions de la forme $\Delta_{ij}\,\Delta_{hk} F - \Delta_{hk}\,\Delta_{ij}\,F$.., on trouve immédiatement

$$\mu_{12} = \mu_{21} = 0\,, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu\,,$$

μ étant une constante quelconque ; les conditions nécessaires et suffisantes qui expriment que $F(e)$ est un invariant sont donc

$$\Delta_{11} F = \Delta_{22} F = \mu F, \quad \Delta_{12} F = \Delta_{21} F = 0.$$

On voit en outre que pour les diverses substitutions $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$, on a

$$F(e') = F(e)\,e^{\mu\omega_{11}},\; F(e') = F(e)\,,\; F(e') = F(e),$$
$$F(e') = F(e)\,e^{\mu\omega_{22}}.$$

Si alors on décompose la substitution quelconque σ en substitutions σ_{ij} comme nous l'avons fait plus haut, il vient

$$F(e') = \delta^{\mu}\,F(e),$$

de sorte que la fonction ω par laquelle se multiplie $F(e)$ quand on passe des (e) aux (e') est une puissance du déterminant δ de la substitution.

Quand l'identité précédente a lieu, on dit que $F(e)$ est un invariant d'ordre μ ; les invariants absolus sont les invariants d'ordre zéro.

11. – Si μ n'est pas nul, on obtiendra tous les invariants F d'ordre μ en égalant à zéro une solution quelconque des quatre équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, à $P+1$ variables indépendantes

$$\Delta_{11}\varphi + \mu F \frac{\partial \varphi}{\partial F} = 0, \quad \Delta_{12}\varphi = 0, \quad \Delta_{21}\varphi = 0, \quad \Delta_{22}\varphi + \mu F \frac{\partial \varphi}{\partial F} = 0.$$

Supposons que ces équations se réduisent à q distinctes, qui forment nécessairement un système complet; on a toujours $q \leq 4$ et il est clair aussi que q est toujours égal à p ou à $p+1$.

Les équations admettent $P-q+1$ solutions distinctes. Si $q=p+1$ les équations ont pour solutions les invariants absolus, et n'en ont pas d'autres où figure F, de sorte qu'il n'y a pas d'invariants d'ordre μ, mais seulement $P-p$ invariants absolus.

Si $q=p$, ce qui arrive en particulier dans le cas général de $p=4$, on voit tout de suite qu'il y a $P-p+1$ invariants distincts d'ordre μ, ce nombre étant supposé positif; sinon il n'y en a aucun.

Si $F_1, F_2, F_3 \ldots$ sont $P-p+1$ invariants d'ordre μ distincts, tout invariant d'ordre μ' est de la forme

$$F_1^{\frac{\mu'}{\mu}} \varphi\left(\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1} \ldots\ldots\right),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Si μ' n'est pas nul, il y a $P-p+1$ invariants distincts d'ordre μ'; si μ' est nul, il y a $P-p$ invariants absolus distincts.

Si maintenant $F_1, F_2, F_3 \ldots\ldots$ désignent $P-p+1$ invariants distincts des ordres $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$, un invariant quelconque d'ordre μ sera de la forme

$$F_1^{\frac{\mu'}{\mu_1}} \varphi\left(\frac{F_2^{\mu_1}}{F_1^{\mu_2}}, \frac{F_3^{\mu_1}}{F_1^{\mu_3}}, \ldots\right),$$

φ étant une fonction arbitraire et μ, n'étant pas nul, ce qui est possible dans notre hypothèse.

12. — Puisque les invariants absolus peuvent être choisis rationnels, il résulte de ce qui a été dit au N°. 10, que l'on peut toujours, quand il y a des invariants absolus, former, pour le système S, un système fondamental d'invariants entiers par rapport aux éléments (e) : par système fondamental, nous entendons un système d'invariants distincts, à l'aide desquels puissent s'exprimer tous les autres. Si le système S n'a que des invariants absolus, ceux-ci peuvent évidemment être choisis entiers.

Si le système S n'a pas d'invariants absolus et a cependant des invariants, il en a un seul distinct : on peut l'obtenir encore sous une forme entière, ainsi que nous le verrons plus loin, au N°. 14.

Ce que nous venons de dire nous permet de ne considérer que des invariants entiers ; c'est ce que nous ferons toujours.

13 — On peut toujours considérer un invariant entier comme homogène séparément par rapport aux diverses séries de variables $(x), (y) \ldots$ et aux diverses séries de coefficients $(a), (b), \ldots$ des formes $f, g, \ldots$ qui constituent le système S. Soit en effet F un invariant qui n'est pas dans ces conditions : il est la somme d'un certain nombre de fonctions entières qui possèdent les propriétés d'homogénéité indiquées plus haut ; si $F_1, F_2, \ldots$ sont ces fonctions, la transformation du système S conduit à l'identité

$$\Sigma\, F_1(x'_1, x'_2\,; y'_1 y'_2\,; \ldots\; a'_{p_1 p_2\,;\, q_1 q_2\,;\,\ldots}, \ldots\, b'_{p'_1 p'_2\,;\, q'_1 q'_2\,;\,\ldots}, \ldots)$$
$$= \delta^{\mu}\, \Sigma\, F_1(x_1, x_2\,; y_1 y_2\,; \ldots\; a_{p_1 p_2\,;\, q_1 q_2\,;\,\ldots}, \ldots\, b_{p'_1 p'_2\,;\, q'_1 q'_2\,;\,\ldots}, \ldots)\,;$$

remplaçons maintenant x_1 et x_2 par Xx_1 et Xx_2, y_1 et y_2 par Yy_1 et Yy_2, ... f par Af, g par Bg, ... les quantités $X, Y, \ldots, A, B, \ldots$ étant des constantes arbitraires. La fonction F exprimée à l'aide de ces nouvelles variables et de ces nouveaux coefficients est encore un invariant du nouveau système ainsi formé, et comme x_1 et x_2 sont remplacés par Xx'_1 et Xx'_2, y'_1 et y'_2 par Yy'_1 et Yy'_2, ..., f' par Af'_1, g' par Bg'...., l'identité précédente devient en supposant F_1 homogène et des degrés $k_1, l_1, \ldots n_1, n'_1$.. respectivement par rapport aux séries $(x), (y), \ldots (a), (b)$..

$$\sum X^{k_1} Y^{l_1} \ldots A^{n_1} B^{n'_1} \ldots F_1(x'_1, x'_2\,; \ldots\, a'_{p_1, p_2\,;\, q_1, q_2\,;\,\ldots}, \ldots)$$
$$= \delta^{\mu} \sum X^{k_1} Y^{l_1} \ldots A^{n_1} B^{n'_1} \ldots F_1(x_1, x_2\,; \ldots\, a_{p_1, p_2\,;\, q_1, q_2\,;\,\ldots}, \ldots)$$

Ceci ayant lieu quelles que soient les arbitraires $X, Y, \ldots A, B, \ldots$, on en déduit que chacune des fonctions $F_1, F_2, \ldots$ est elle même un invariant d'ordre μ, puisque pour deux de ces fonctions les systèmes de nombres $k_1, l_1, \ldots, n_1, n'_1, \ldots$ sont par hypothèse différents.

En conséquence, tout invariant F sera toujours supposé entier, homogène et des degrés $k, l, \ldots n, n'$. par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients $(x), (y), \ldots (a), (b)$.. qui constituent le système S ; si μ est l'ordre de cet invariant, on a évidemment, en cherchant le degré de F. par rapport aux (λ), la relation

$$2\mu = n(p+q+\ldots) + n'(p'+q'\ldots) + \ldots - k - l - \ldots$$

14.- Les invariants F entiers et homogènes séparément par rapport aux diverses séries d'éléments qui constituent le système S,

peuvent être considérés comme caractérisés par les équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes.

$$\Delta_{11} F - \Delta_{22} F = 0, \ \Delta_{12} F = 0, \ \Delta_{21} F = 0,$$

qui forment un système complet.

En effet ces équations caractérisent les invariants absolus relatifs aux substitutions σ dont le déterminant est égal à 1; car celles-ci forment un groupe; et chaque substitution du groupe peut être obtenue par la combinaison de substitutions de la forme

$$\begin{cases} x_1 = e^{\omega_{11}} x'_1 \\ x_2 = e^{-\omega_{11}} x'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 + \omega_{12} x'_2 \\ x_2 = \phantom{x'_1 + \omega_{12}} x'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = \omega_{21} x'_1 + x'_2 \end{cases};$$

alors un raisonnement semblable à celui du N.º 9 justifie l'assertion précédente.

Or, tout invariant de S est un invariant absolu pour les substitutions σ de déterminant 1; la réciproque est vraie, si l'invariant absolu relatif aux substitutions considérées est entier et homogène séparément par rapport aux diverses séries d'éléments du système S : cela résulte de la forme des formules de transformations et de ce que l'on passe de la substitution générale σ, à une substitution de déterminant 1, en remplaçant λ_{ij} par $\frac{\lambda_{ij}}{\sqrt{\delta}}$.

Les équations $\Delta_{11} F - \Delta_{22} F = 0, \Delta_{12} F = 0, \Delta_{21} F = 0$, sont donc distinctes en nombre $q-1$, et admettent $P-q+1$ solutions distinctes que l'on peut choisir entières et homogènes séparément par rapport aux diverses séries d'éléments du système S.

Ces conséquences de ce qui précède peuvent être démontrées directement : en effet les invariants absolus des substitutions σ à

déterminant 1 sont rationnels ; de plus on fera voir que pour ces substitutions il n'y a pas d'invariants non absolus en raisonnant comme au N.º 10 ; donc les invariants absolus considérés peuvent être pris entiers, sans quoi ils fourniraient des invariants non absolus ; comme au N.º 13, ces invariants absolus entiers peuvent être pris homogènes séparément par rapport aux diverses séries d'éléments du système S, et par suite forment un système fondamental d'invariants pour le système S. On voit par là qu'un tel système est toujours composé d'invariants entiers, dans tous les cas possibles.

L'équation qu'il faut joindre aux précédentes pour caractériser les invariants d'ordre μ est par exemple

$$\Delta_{11} F + \Delta_{22} F = 2\mu F;$$

elle est vérifiée d'elle même, d'après le théorème d'Euler, dans les hypothèses faites sur F, μ étant déterminé par la relation qui termine le N.º précédent : il suffit de se reporter à la définition de $\Delta_{11} F$ et $\Delta_{22} F$ pour s'en convaincre.

15. — On réserve ordinairement le nom d'invariants aux fonctions invariantes qui ne dépendent que des coefficients des formes du système S ; celles qui dépendent aussi des variables sont alors des <u>covariants</u>. Nous avons confondu ces fonctions sous le nom générique d'<u>invariants</u>, et nous continuerons à le faire toutes les fois que le langage en sera simplifié. Ajoutons que pour un système quelconque S il existe toujours un système de Q invariants entiers qui ne sont pas tous indépendants, tels que tout autre invariant entier du système soit une fonction <u>entière</u> de ceux-là : un tel système d'invariants est dit <u>complet</u>.

Cette proposition est connue sous le nom de Théorème de Gordan; elle a été démontrée d'une façon générale par M.r D. Hilbert (Mathematische Annalen, Band XXXVI) : nous ne nous occuperons pas de la formation des systèmes complets, sauf dans des cas très particuliers.

---

§ 5. – Propriétés générales des Invariants.

16. – Soit un système S composé comme précédemment ; supposons que dans l'une des formes du système, f par exemple, on regarde certaines variables, soit les (x), comme des constantes; on obtient ainsi un nouveau système T composé de $(x), (y), \ldots, F = A y^q z^r \ldots, g \ldots,$ où l'on a

$$A_{q_1 q_2; r_1 r_2; \ldots} = \sum \frac{P_p}{P_{p_1}, P_{p_2}} \, a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \ldots} \ldots x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

la sommation étant étendue aux divers systèmes de valeurs de p_1 et p_2. Dans ces conditions, un invariant quelconque du système T est encore, quand on y considère les (x) figurant dans les (A) comme des variables, un invariant du système S.

En effet, soit J un invariant de T, d'ordre μ ; J vérifie les équations

$$\mu J = -x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial J}{\partial y_1} - \ldots + (q_1 + r_1 + \ldots) A_{q_1 q_2; r_1 r_2; \ldots} \frac{\partial J}{\partial A_{q_1 q_2; r_1 r_2; \ldots}} + \ldots$$

$$+ (p'_1 + q'_1 + \ldots) b_{p'_1 p'_2; q'_1 q'_2; \ldots} \frac{\partial J}{\partial b_{p'_1 p'_2; q'_1 q'_2; \ldots}} + \ldots$$

dont nous n'écrivons que la première.

Remplaçons dans J les (A) par leurs valeurs en fonction des (a) et des (x), et appelons I la nouvelle fonction obtenue. On a

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = \frac{\partial J}{\partial x_1} + \sum \frac{\partial J}{\partial A_{q_1,q_2;\dots}} \left(\sum p_1 \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2}} a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \dots} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2} \right),$$

$$\frac{\partial I}{\partial x_2} = \frac{\partial J}{\partial x_2} + \sum \frac{\partial J}{\partial A_{q_1,q_2;\dots}} \left(\sum p_2 \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2}} a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \dots} x_1^{p_1} x_2^{p_2-1} \right),$$

$$\frac{\partial I}{\partial y_1} = \frac{\partial J}{\partial y_1},$$

. . . .

$$\frac{\partial I}{\partial a_{p_1 p_2; q_1, q_2; \dots}} = \frac{\partial J}{\partial A_{q_1, q_2; \dots}} \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2}} x_1^{p_1} x_2^{p_2},$$

. . . .

$$\frac{\partial I}{\partial b_{p'_1, p'_2; \dots}} = \frac{\partial J}{\partial b_{p'_1, p'_2; \dots}},$$

. . . .

En tenant compte des équations vérifiées par J, on en tire immédiatement $\Delta_{11} I = \Delta_{22} I = \mu I$, $\Delta_{12} I = \Delta_{21} I = 0$; de sorte que I est bien un invariant d'ordre μ du système S.

La proposition se généralise évidemment ; on peut supposer que plusieurs séries de variables sont considérées comme constantes dans plusieurs formes.

17. — Soit un système S composé comme plus haut, et

$$F = A_{x^k y^l \dots} = \sum \frac{P_k P_l \dots}{P_{k_1} P_{k_2} P_{l_1} P_{l_2} \dots} A_{k_1, k_2; l_1, l_2; \dots} x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots$$

une nouvelle forme qui soit un invariant d'ordre μ du système S.

Substituant la valeur de F dans les équations aux dérivées partielles que vérifie F, et égalant à zéro le coefficient de chaque monôme de la forme $x_1^{k_1} x_2^{k_2} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots$, on obtient les relations

importantes que voici:

$$\Delta_{11} A_{k_1,k_2;} \dots = (\mu + k_1 + l_1 + \dots) A_{k_1,k_2;} \quad \dots ,$$
$$\Delta_{12} A_{k_1,k_2;} \dots = k_2 A_{k_1+1, k_2-1;} \dots\dots + \dots ,$$
$$\Delta_{21} A_{k_1,k_2;} \dots = k_1 A_{k_1-1; k_2+1;} \dots\dots + \dots ,$$
$$\Delta_{22} A_{k_1,k_2;} \dots = (\mu + k_2 + l_2 + \dots\dots) A_{k_1,k_2;} \quad \dots .$$

En particulier, si F ne contient qu'une seule série de variables, on voit que connaissant un seul des coefficients A_{k_1,k_2}, on peut déterminer facilement tous les autres. De même, si F ne contient que deux séries de variables, du coefficient $A_{k,0;\,0,l}$, par exemple, on déduira facilement tous les autres.

18. – Considérons le système S et envisageons de nouvelles formes

$$F = A_{x^k y^l} \dots , \quad G = B_{x^{k'} y^{l'}} \dots ,$$

qui soient des invariants du système S, des ordres $\mu, \mu', \dots$ quelques unes de ces formes pouvant par suite coïncider avec quelques unes des formes $f, g, \dots$ du système S.

Considérons le nouveau système T composé des variables $(x), (y), \dots$ et des formes F, G, ... et soit J un invariant de ce système; ce sera aussi un invariant du système S, à la condition qu'il soit homogène séparément par rapport aux coefficients (A), (B), ... des formes F, G ...; h, h', ... désigneront les degrés d'homogénéité correspondants; ν l'ordre de J.

J vérifie les équations

$$\nu J = -x_1 \frac{dJ}{dx_1} - \dots + (k_1 + l_1 + \dots) A_{k_1,k_2;\dots} \frac{dJ}{dA_{k_1,k_2;\dots}} + \dots$$

....

dont nous n'écrivons que la première ; de plus les coefficients (A), (B) vérifient les relations du N°. précédent.

Remplaçons dans J les coefficients (A), (B), .. par leurs valeurs en fonction des (a), (b), ..., et appelons I la nouvelle fonction obtenue.

On a

$$\frac{\partial I}{\partial x_1} = \frac{\partial J}{\partial x_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_{p_1 p_2;\dots}} = \sum \frac{\partial J}{\partial A_{k_1 k_2;\dots}} \frac{\partial A_{k_1 k_2;\dots}}{\partial a_{p_1 p_2;\dots}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Tenant compte des équations que nous venons de rappeler, et des conditions d'homogénéité supposées, on trouve alors sans peine

$$\Delta_{11} I = \Delta_{22} I = (\nu + \mu h + \mu' h' + \dots) I, \quad \Delta_{12} I = \Delta_{21} I = 0 ;$$

I est donc un invariant d'ordre $\nu + \mu h + \mu' h' + \dots$ du système primitif S.

Plus brièvement on peut dire que les invariants des invariants d'un système sont eux-mêmes des invariants de ce système.

Les démonstrations du théorème précédent et de celui du N°. 16 sont très simples quand on considère un système composé d'une seule forme. On peut aussi démontrer ces théorèmes directement de la façon suivante.

Pour le dernier envisagé, soit par exemple une forme $f = a_x{}^p$ et un invariant $F = A_x{}^k$ de cette forme, d'ordre μ ; soit J un invariant d'ordre ν de F, homogène et de degré h par rapport aux (A). Soit $f' = a'_{x'}{}^p$ et $F' = A'_{x'}{}^k$ les transformées de f et F par la substitution σ ; on a $f' = f$, $F' = F$, $F(a', x') = \delta^\mu F(a, x)$, $J(A', x') = \delta^\nu J(A, x)$; on en tire $F' = \delta^{-\mu} F(a', x')$; donc les (A') sont les mêmes fonctions

des (α') que les (A) des (α) au facteur $\delta^{-\mu}$ près. Si donc $J(A,x)$ devient $I(\alpha,x)$, quand on l'exprime à l'aide des (α), on a

$$\delta^{-\mu h} I(\alpha', x') = \delta^{\nu} I(\alpha, x),$$

et par suite $I(\alpha,x)$ est un invariant d'ordre $\nu+\mu h$ de f.

De même dans le 1er cas, celui du théorème du N° 16, soit par exemple $f = \alpha_{x^p y^q} = A_{y^q}$ une forme, et considérons un invariant J d'ordre μ de A_{y^q}. Supposons que par la transformation σ effectuée sur les (y) seuls, A_{y^q} devienne $A'_{y'^q}$, on aura

$$J(A', y') = \delta^{\mu} J(A, y);$$

dans $A'_{y'^q}$ faisons encore subir aux (x) la transformation σ; on obtiendra $A''_{y'^q}$ qui sera identique à f', obtenue en transformant dans f les (x) et (y) par la substitution σ; donc à cause de :

$$A'_{y'^q} = A''_{y'^q} = f'$$

on voit que les (A') sont les mêmes fonctions des (α') et des (x') que les (A) des (α) et des (x), et, par suite, si $J(A,y)$ devient $I(\alpha,x,y)$ quand on l'exprime à l'aide des (α) et des (x), on a

$$I(\alpha', x', y') = \delta^{\mu} I(\alpha, x, y),$$

de sorte que I est un invariant d'ordre μ de f.

On pourra raisonner de même dans tous les cas possibles.

19. - Soit F un invariant entier d'ordre μ du système S. La substitution particulière σ_{11} ne produit d'autre effet que de changer x_1 en $x'_1 e^{\omega_{11}}$, x_2 en x'_2, ... $\alpha_{p_1 p_2 ; q_1 q_2 ; \ldots}$ en $\alpha_{p_1 p_2 ; q_1 q_2 ; \ldots} e^{-(p_1+q_1+\ldots)\omega_{11}}$; donc F est une fonction isobarique et de poids μ par rapport à l'indice 1; réciproquement, toute fonction entière jouissant de cette propriété vérifie l'équation $\Delta_{11} F = \mu F$.

En répétant le même raisonnement pour σ_{22}, on voit que pour trouver les invariants entiers d'ordre μ, il suffira de chercher les fonctions entières, isobariques de poids μ, qui vérifient les deux équations $\Delta_{12} F = 0$, $\Delta_{21} F = 0$ ce qui peut se faire aisément par la méthode des coefficients indéterminés.

De la même façon, chaque coefficient $A_{k_1, k_2; l_1, l_2; \ldots}$ d'un invariant $A_{x^k y^l \ldots}$, d'ordre μ, est une fonction entière, isobarique et des poids $\mu + k_1 + l_1 + \ldots$, et $\mu + k_2 + l_2 + \ldots$, par rapport aux indices 1 et 2; on a de plus en particulier : $\Delta_{12} A_{k, 0; l, 0; \ldots} = 0$ & $\Delta_{21} A_{0, k; 0, l; \ldots} = 0$.

Considérons maintenant la substitution particulière

$$x_1 = x'_2 \quad , \quad x_2 = x'_1$$

de déterminant -1.

Si F est un invariant d'ordre μ, on aura :

$$F(x_1, x_2; \ldots a_{p_1 p_2; q_1 q_2; \ldots, \ldots}) = (-1)^{\mu} F(x_2, x_1; \ldots a_{p_2 p_1; q_2 q_1; \ldots, \ldots});$$

ainsi, si μ est pair, F ne change pas quand on permute à la fois les variables x_1 et x_2 ....., les coefficients $a_{p_1 p_2; \ldots}$ et $a_{p_2, p_1; \ldots}$; si μ est impair, F change de signe quand on exécute la même opération.

Dans le premier cas, l'invariant F est dit droit ; dans le second cas il est dit gauche.

Il est clair qu'une fonction F entière, isobarique et de poids μ conservant la même valeur au signe près, quand on fait l'échange précédemment indiqué entre les variables et les coefficients, est un invariant si elle vérifie la seule équation $\Delta_{12} F = 0$ par exemple.

---

§.6...

§. 6. – Interprétation géométrique des théories précédentes.

---

20. – Nous pouvons supposer qu'une série simplement infinie d'éléments géométriques quelconques, remplissant par suite un espace à une dimension, est définie de la façon suivante: à chaque valeur du rapport $\frac{x_2}{x_1}$ de deux variables binaires correspond un élément de l'espace considéré et un seul; par suite si les couples (y_1, y_2) et (z_1, z_2) définissent le même élément, on a $y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$, ou pour abréger $(yz) = 0$. Les variables (x) sont supposées toujours finies, et ne peuvent s'annuler en même temps.

Il en est ainsi par exemple pour des points en ligne droite, pour des droites passant par un point dans un plan, pour un faisceau de plans, pour les points d'une courbe unicursale, pour les coniques d'un faisceau, etc. D'une façon générale, nous ne parlerons que de points en ligne droite, quand nous traduirons géométriquement les résultats obtenus: mais il ne faudra pas oublier que ce n'est là qu'un cas particulier. L'élément qui correspond aux valeurs (y_1, y_2) des variables est l'élément (y); ρy_1 & ρy_2 sont ses deux coordonnées, ρ étant une quantité quelconque finie et non nulle.

Les éléments particuliers O_1 et O_2 qui correspondent aux hypothèses $y_2 = 0$ et $y_1 = 0$ sont les éléments fondamentaux ou de référence. Les coordonnées d'un élément ont une signification purement géométrique déterminée suivant les cas.

Une forme, égalée à zéro, établit une relation entre les

éléments variables $(x), (y), (z)$... dont elle contient les coordonnées. Si en particulier, elle ne contient qu'une seule série de variables, telle que $f = a_x{}^p$, elle définit, quand on l'égale à zéro, p éléments qu'on peut appeler les <u>racines</u> de f. Au point de vue géométrique deux telles formes de même degré à coefficients proportionnels sont équivalentes, en ce sens qu'elles définissent les mêmes éléments. Une telle forme est déterminée au point de vue géométrique par p éléments ou p coefficients.

La polaire d'ordre h de $f = a_x{}^p$, soit $a_x{}^{p-h} a_y{}^h$, définit quand on l'égale à zéro et que l'on regarde (y) comme donné, $p-h$ éléments qui forment le <u>système polaire</u> d'ordre h de (y) par rapport à f. Si (x) appartient à ce système, il est clair qu'inversement (y) appartient au système polaire d'ordre $p-h$ de x par rapport à f.

21. – Considérons maintenant la substitution linéaire σ. Les nouvelles variables (x') peuvent être regardées comme des coordonnées d'éléments géométriques; car x'_1 et x'_2 ne s'annulent pas en même temps, et aucune d'elles ne devient infinie, si ces conditions sont vérifiées par x_1 et x_2; de plus, les rapports $\frac{x'_2}{x'_1}$ & $\frac{x_2}{x_1}$ varient ou restent constants en même temps, et peuvent prendre chacun toutes les valeurs possibles.

Ceci posé, on peut imaginer:

1° que les éléments géométriques définis par les nouvelles variables sont différents de ceux définis par les (x) et remplissent un espace différent. La substitution σ établit alors entre les éléments de deux espaces une correspondance doublement univoque, <u>sans exception</u>: à chaque élément de l'un des espaces correspond un élément de l'autre, et un seul.

Réciproquement, toute substitution établissant entre les éléments des deux espaces une telle correspondance sera une substitution linéaire à déterminant non nul, telle que σ.

Une telle correspondance est dite <u>homographique</u>; les deux espaces considérés sont <u>homographiques</u> ou <u>collinéaires</u>.

2°. Que les éléments géométriques définis par les nouvelles variables sont les mêmes que ceux définis par les (x) et par suite remplissent le même espace, qui est ainsi défini deux fois : une fois par les éléments (x) et une fois par les éléments (x'). Les deux séries des (x) et des (x') sont en correspondance homographique, comme précédemment; et réciproquement pour deux séries collinéaires d'éléments remplissant le même espace, les coordonnées de deux éléments correspondants sont liées par une substitution linéaire telle que σ.

D'ailleurs, dans ce cas, les systèmes de coordonnées auxquels sont rapportés les éléments (x) et (x') sont ou ne sont pas identiques; s'ils sont identiques, la condition $(x\,x')=0$ garde sa signification géométrique de coïncidence.

3°. que les éléments géométriques définis par les nouvelles variables sont les mêmes que ceux définis par les (x) et qu'en outre chaque élément (x) coïncide avec son correspondant (x'). La substitution σ définit alors une <u>transformation de coordonnées</u>; les éléments fondamentaux O_1', O_2' du nouveau système ont respectivement pour coordonnées dans l'ancien $(\lambda_{11}, \lambda_{21})$, $(\lambda_{12}, \lambda_{22})$; ils peuvent coïncider avec ceux de l'ancien système, sans que la substitution σ se réduise à la substitution identique. Réciproquement, tout changement de coordonnées est défini par une substitution telle que σ, puisqu'à chaque

couple (x_1, x_2) doit correspondre un seul couple (x'_1, x'_2) et inversement ; et que, en outre, x'_1 et x'_2 doivent comme x_1 et x_2 rester toujours finies, et ne pas s'annuler en même temps.

En général, quelle que soit la façon dont on envisage la substitution σ, une forme f égalée à zéro établit une relation entre les coordonnées des éléments qui y figurent ; la forme f', transformée de f par la substitution σ, égalée à zéro établit la relation correspondante entre les nouvelles coordonnées des éléments qui correspondent aux premiers. Si, en particulier, f ne dépend que d'une seule série de variables, $f=0$ définit des éléments fixes ; $f'=0$ définit par leurs nouvelles coordonnées les éléments qui correspondent à ceux-là.

22. – Tandis qu'au point de vue analytique la substitution σ dépend des quatre paramètres (λ), il est évident qu'au point de vue géométrique elle ne dépend que de trois paramètres, qui sont les rapports des (λ) entre eux ; en effet, un élément ne dépend que du rapport de ses deux coordonnées, et pour définir une homographie ou un changement de coordonnées, il suffit d'écrire

$$\frac{\lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2}{x_1} = \frac{\lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2}{x_2}.$$

Il en résulte, par exemple, qu'une homographie est déterminée par trois couples d'éléments correspondants ; qu'un changement de coordonnées est déterminé par la connaissance des nouvelles coordonnées de trois éléments.

23. – Les substitutions σ formant un groupe, il en résulte

que l'on peut dire :

1° Plusieurs changements de coordonnées successifs équivalent à un seul.

2° Deux séries d'éléments collinéaires à une même troisième sont collinéaires entre elles.

3° Un changement quelconque de coordonnées n'altère pas l'homographie de deux séries ; et en particulier, si deux séries remplissant le même espace sont collinéaires, on peut toujours, sans diminuer la généralité, supposer les éléments des deux séries rapportés au même système de coordonnées.

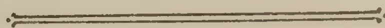
24. – Au point de vue géométrique, les seuls invariants absolus intéressants sont évidemment ceux qui sont homogènes et de degré zéro par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui y figurent.

L'existence d'un tel invariant correspond à l'existence d'une propriété du système S, ayant lieu quels que soient les éléments qui constituent ce système, et ne changeant pas quand on fait une transformation de coordonnées quelconque, ou encore quand on remplace ce système par celui qui lui correspond dans un espace homographique quelconque. Une telle propriété est dite <u>invariante absolue</u> ou <u>projective absolue</u>. Réciproquement, à toute propriété de cette nature, correspond un invariant absolu dans les conditions énoncées plus haut.

Parmi les invariants ordinaires, les seuls intéressants au point de vue géométrique sont ceux qui sont homogènes séparément par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui y figurent.

nous avons vu d'ailleurs que les invariants pouvaient toujours être pris sous cette forme. L'évanouissement d'un tel invariant correspond évidemment à l'existence accidentelle d'une propriété projective du système S, c'est-à-dire d'une propriété qui subsiste après une transformation de coordonnées, ou quand on remplace le système S par celui qui lui correspond dans un espace homographique quelconque. Réciproquement, toute propriété de ce genre, correspondant à une seule relation entre les éléments du système S, est évidemment exprimée par l'évanouissement d'un invariant.

L'importance géométrique de l'étude des invariants d'un système binaire ressort clairement de ce que nous venons de dire.



Chapitre II.

Les Principales formations invariantes

§ 1. Les polaires.

25. — Nous allons passer en revue quelques-unes des formations invariantes générales les plus importantes.

Une polaire quelconque d'une forme f est un invariant absolu de cette forme et des variables qui figurent dans cette polaire.

Il suffit évidemment de démontrer cette proposition pour une première polaire $D^1_{xy} f$.

Si f est de degré p par rapport aux (x), on a

$$D^1_{xy} f = \frac{1}{p} \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right);$$

si f' est la transformée de f, on a

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11} y'_1 + \lambda_{12} y'_2 \\ y_2 &= \lambda_{21} y'_1 + \lambda_{22} y'_2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\lambda_{22}}{\delta} \frac{\partial f'}{\partial x'_1} - \frac{\lambda_{21}}{\delta} \frac{\partial f'}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= -\frac{\lambda_{12}}{\delta} \frac{\partial f'}{\partial x'_1} + \frac{\lambda_{11}}{\delta} \frac{\partial f'}{\partial x'_2} \end{aligned},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$D^1_{x'y'} f' = D^1_{xy} f.$$

D'après le N° 18, les invariants des polaires de f seront des invariants de f.

26. — Soit maintenant F un invariant d'un système S, comprenant en particulier une forme f, dont nous désignerons les coefficients par $a_1, a_2, \ldots\ldots a_k$. Soit g une nouvelle forme semblable à f, c'est-à-dire contenant les mêmes variables aux mêmes degrés, et de coefficients $b_1, b_2, \ldots\ldots b_k$.

Si F est de degré p par rapport aux (a), sa polaire d'ordre h relative aux (a) remplacés par les (b) est la nouvelle fonction

$$D^h_{ab}\,F = \frac{P_{p-h}}{P_p}\left(b_1\frac{\partial F}{\partial a_1} + b_2\frac{\partial F}{\partial a_2} + \ldots + b_k\frac{\partial F}{\partial a_k}\right)^h,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique. On pourra étendre cette notion comme nous l'avons fait au N°4, et faire les mêmes remarques.

La polaire $D^h_{ab}F$ est un invariant du système S auquel on a adjoint la forme g. Nous allons le faire voir de la façon suivante, qui aurait pu servir aussi dans le cas précédent. Remplaçons f par $f+\lambda g$, λ étant arbitraire ; F devient $F(a_1+\lambda b_1, a_2+\lambda b_2, \ldots.)$ et est évidemment un invariant de même ordre que F du nouveau système ; il en est de même alors des coefficients des diverses puissances de λ dans le développement de cette fonction ; mais le coefficient de λ^h est $D^h_{ab}F$ à un facteur numérique près. Le théorème est donc démontré : on peut le généraliser et l'étendre à des polaires multiples.

---

§.2. – Les Invariants en fonction des racines.

27. – Considérons un système S composé de variables (x), et de formes $f = a_{x}^{p}$, $g = b_{x}^{p'}$, ... à une seule série de variables. Mettons en évidence les racines de ces formes, en écrivant

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)(b_1 x_1 + b_2 x_2) \ldots\ldots (l_1 x_1 + l_2 x_2),$$

ou plutôt, en remplaçant a_1 par α_2 et a_2 par $-\alpha_1$, ...

$$f = (x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1)(x_1 \beta_2 - x_2 \beta_1) \ldots (x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1)$$
$$= (x\alpha)(x\beta) \ldots\ldots (x\lambda) :$$

les éléments $(\alpha), (\beta), \ldots (\lambda)$ sont les racines de f (20).

Ce que nous avons dit au No. 3 des fonctions symétriques des $(a), (b), \ldots$ s'applique immédiatement aux $(\alpha), (\beta), \ldots\ldots$

De même, on aura

$$g = (x\mu)(x\nu) \ldots (x\tau).$$

Après une substitution linéaire (σ), on peut écrire

$$f' = (x'\alpha')(x'\beta') \ldots (x'\lambda'),$$
$$g' = (x'\mu')(x'\nu') \ldots (x'\tau'),$$

et l'on a des relations telles que

$$\alpha_1 = \frac{1}{\delta}(\lambda_{11}\alpha'_1 + \lambda_{12}\alpha'_2),$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta}(\lambda_{21}\alpha'_1 + \lambda_{22}\alpha'_2).$$

Cela étant, on voit que les déterminants des types $(xy), (x\alpha), (\alpha\beta)$ deviennent respectivement, après la substitution, $\delta(x'y'), (x'\alpha'), \frac{1}{\delta}(\alpha'\beta')$; donc toute fonction entière des $(xy), (x\alpha), (\alpha\beta), (\alpha\mu), (\mu\nu), (x\mu), \ldots$ sera un invariant du système S, si elle est homogène par rapport aux diverses séries de variables, et de plus symétrique et homogène de

même degré par rapport aux divers couples des séries $(\alpha), (\beta), (\mu), (\nu), \ldots$ (3).

Réciproquement, tout invariant entier de S peut être considéré comme jouissant des mêmes propriétés de symétrie et d'homogénéité, et pourra s'exprimer comme nous venons de le dire : car ce sera aussi un invariant du système composé avec les variables $(x), (y), \ldots$ et les formes linéaires $(x\alpha), \ldots (x\mu), \ldots$, système qui admet, comme nous le verrons plus loin, les quantités $(xy), (x\alpha), (\alpha\beta), (\alpha\mu), \ldots$ mentionnées plus haut, comme système <u>complet</u> d'invariants. (15).

Si nous appliquons ce que nous venons ce que nous venons de dire aux polaires, on obtient sans peine, $(\alpha), (\beta), \ldots (\xi)$ étant en nombre h :

$$D^h_{x,y} f = \frac{P_h P_{p-h}}{P_p} f \sum \frac{(y\alpha)(y\beta)\ldots(y\xi)}{(x\alpha)(x\beta)\ldots(x\xi)}.$$

---

§. 3. — Les Résultants et les Discriminants.

28. — Soient deux formes

$$f = a_x{}^p = (x\alpha)(x\beta)\ldots\ldots(x\lambda),$$

$$g = b_x{}^{p'} = (x\mu)(x\nu)\ldots\ldots(x\tau).$$

Le <u>résultant</u> de ces deux formes est

$$R = a_\mu{}^p\, a_\nu{}^p \ldots\ldots a_\tau{}^p$$

$$= (-1)^{pp'} b_\alpha{}^{p'}\, b_\beta{}^{p'} \ldots\ldots b_\lambda{}^{p'}$$

$$= (-1)^{pp'} \Pi(\alpha\mu),$$

où $a_\mu{}^p$ désigne ce que devient f quand on y remplace les (x) par les (μ).

R est un invariant d'ordre pp' du système (f, g) des degrés p' et p, respectivement, par rapport aux (a) et aux (b).

$R = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les

formes f et g aient au moins une racine commune.

Remplaçons la forme f par $f+\omega h$, ω étant un paramètre arbitraire et h une forme semblable à f, $h = c_{x^p}$; le résultant de $f+\omega h$ et de g est

$$R' = R + \omega \frac{P_{p'}}{P_1 . P_{p'-1}} D^1_{ac} R + \omega^2 \frac{P_{p'}}{P_2 . P_{p'-2}} D^2_{ac} R + \dots ;$$

d'autre part, si q des racines de g, soient $(\mu), (\nu) \dots (\pi)$ appartiennent à f, on a

$$R' = \omega^q c_{\mu^p} c_{\nu^p} \dots c_{\pi^p} (a_{\rho^p} + \omega c_{\rho^p}) \dots (a_{\tau^p} + \omega c_{\tau^p}) ,$$

$(\rho), \dots\dots (\tau)$ désignant les autres racines de (g).

Donc ce cas est caractérisé par ce fait que $D^k_{ac} . R$ est nul identiquement pour $k < q$, c'est-à-dire que les dérivées partielles de l'ordre $q-1$ de R par rapport aux (a) sont toutes nulles ; en outre $D^q_{ac} R$ contient en facteur $c_{\mu^p} \dots c_{\pi^p}$; et cette même quantité est en facteur dans R'.

On a ainsi le moyen de reconnaître combien de racines de g appartiennent à f, et de calculer ces racines, puisque $D^q_{ac} R$ est précisément de degré q par rapport aux (c). Si, en particulier, on prend $h = (x\, y)^p$ on voit que $D^q_{ac} R$ sera la puissance $p^{\text{ème}}$ de $(\mu y)(\nu y) \dots (\pi y)$.

On remarquera d'ailleurs que si q racines de g appartiennent à f, cela ne veut pas dire que f et g ont q racines communes ; ceci en effet n'est pas vrai en général, si parmi ces q racines il y en a de multiples pour g ; pour que f et g aient q racines communes, il faudra en outre que q racines de f appartiennent à g, ce qui s'exprimera de la même façon.

Le résultant de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ et $\mu_1 f + \mu_2 g$, lorsque f et g sont des formes semblables est évidemment $(\lambda \mu)^p R$, R étant le résultant

de f et g. On dit alors que le résultant de f et g, de même degré, est un <u>combinant</u> de ces formes, et l'on emploie la même expression dans les cas analogues.

29. — Le <u>discriminant</u> δ de la forme $f = a_x{}^p$ est le résultant de ses deux dérivées partielles $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2}$; c'est donc une fonction entière et homogène du degré $2p-2$ des coefficients (a).

$\delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que f ait une racine multiple; δ est donc un invariant de f, d'ordre $p(p-1)$. D'après cela, δ ne peut différer que par un facteur numérique du produit $\Pi(\alpha\beta)^2$, si l'on a comme avant $f = (x\alpha)(x\beta)\dots(x\lambda)$.

Cette remarque montre encore que le discriminant du produit de deux formes est égal au produit de leurs discriminants multiplié par le carré de leur résultant

Si g est une forme quelconque semblable à f, $g = b_x{}^p$, et ω un paramètre arbitraire, le discriminant δ' de $f+\omega g$ est

$$\delta' = \delta + \omega \frac{P_{2p-2}}{P_1 . P_{2p-3}} D^1_{ab}\,\delta + \omega^2 \frac{P_{2p-2}}{P_2 . P_{2p-4}} D^2_{ab}\,\delta + \dots ;$$

ce discriminant est aussi le résultant des formes

$$\varphi_1 = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \omega\frac{\partial g}{\partial x_1}\right),\quad \varphi_2 = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \omega\frac{\partial g}{\partial x_2}\right);$$

considérons le résultant R' des formes

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 = f + \omega g$$

$$\varphi_1\frac{\partial g}{\partial x_2} - \varphi_2\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right);$$

il contient δ' en facteur, et aussi le résultant R de f et g, puisque si l'on a $x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 = 0$, $\varphi_1\frac{\partial g}{\partial x_2} - \varphi_2\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$ sans que φ_1 et φ_2

soient nuls, on a aussi $\frac{1}{p}\left(x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) = g = 0$, et la première équation se réduit alors à $f = 0$.

En comparant les degrés par rapport aux coefficients, on voit que $R' = M.R.S'_1 M$ étant numérique et indépendant de ω. Cela étant supposons que $(\mu), (\nu), \ldots$ soient communes respectivement $m, n, \ldots$ fois à $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, et par suite soient racines multiples des degrés $m+1$, $n+1, \ldots$ pour f ; pour abréger nous ferons $m+n+\ldots = q$; appelons aussi $(\pi), (\rho), \ldots$ les autres racines de $\varphi_1 \frac{\partial g}{\partial x_2} - \varphi_2 \frac{\partial g}{\partial x_1}$ en nombre $2p-2-q$; on a

$$R' = \omega^q b^m_{\mu p}\, b^n_{\nu p} \ldots (a_{\pi p} + \omega b_{\pi p})(a_{\rho p} + \omega b_{\rho p}) \ldots ;$$

d'ailleurs le coefficient de ω^q n'est pas nul, si g reste arbitraire ; si en effet l'on avait $a_{\pi p} = 0$ par exemple, on aurait à la fois

$$a_{\pi p} = \frac{1}{p}\left(\pi_1 \frac{\partial f}{\partial \pi_1} + \pi_2 \frac{\partial f}{\partial \pi_2}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \pi_1}\frac{\partial g}{\partial \pi_2} - \frac{\partial f}{\partial \pi_2}\frac{\partial g}{\partial \pi_1} = 0,$$

sans que $\frac{\partial f}{\partial \pi_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial \pi_2}$ fussent tous deux nuls, et par suite

$$\frac{1}{p}\left(\pi_1 \frac{\partial g}{\partial \pi_1} + \pi_2 \frac{\partial g}{\partial \pi_2}\right) = b_{\pi p} = 0,$$

ce qui est inadmissible.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ayant q racines communes, distinctes ou non, on voit d'abord que R' et par suite S' contient ω^q en facteur, sans que le coefficient de ω^q soit nul : les dérivées partielles de l'ordre $q-1$ de S par rapport aux (a) sont donc toutes nulles, et $D^q_{ab} S$ n'est pas nul.

Si X et Ψ désignent les produits $(x\pi)(x\rho)\ldots$ et $(x\mu)^m (x\nu)^n \ldots$, le coefficient de ω^q dans R' est égal au produit du résultant de g et Ψ et du résultant de f et X. Ceci posé, remplaçons g par

$g+\omega' h$, h étant une forme quelconque semblable à g et ω' une nouvelle arbitraire, et supposons que g admette la racine (μ) une fois. Si R'' désigne ce que devient R', R'' admettra ω^q en facteur, et le coefficient de ω^q sera le produit du résultant de $g+\omega' h$ & Ψ et du résultant de f et X', X' désignant ce que devient X. Le résultant de $g+\omega' h$ et Ψ contiendra évidemment ω'^m en facteur; de même si l'on remarque que X admet la racine (μ) une fois aussi, comme nous le verrons plus loin (34), le résultant de f et X' contient ω'^{m+1} en facteur, puisque f admet $m+1$ fois la racine (μ). Finalement, le coefficient de ω^q dans R'' contient ω'^{2m+1} en facteur; le résultant de f et $g+\omega' h$ contient évidemment ω'^{m+1} en facteur; donc le discriminant S'' de $f+\omega(g+\omega' h)$ contient $\omega^q\omega'^m$ en facteur. Il est clair d'après ceci que les polaires $D^k_{bc}(D^q_{ab} S)$, qui sont les coefficients des termes $\omega^q\omega'^k$ dans S'', les (c) étant les coefficients de h, sont toutes nulles pour $k<m$ dans l'hypothèse faite, et par suite $D^q_{ab} S$ contient le facteur $b^m_{\mu\rho}$. Comme $D^q_{ab} S$ est de degré q par rapport aux (b), cette quantité est donc égale au produit $b^m_{\mu\rho}\ b^n_{\nu\rho}\ \ldots$ multiplié par une quantité non nulle indépendante des (b).

On a ainsi le moyen de reconnaître le nombre et la nature des racines multiples de f et de déterminer ces racines. Si en particulier on prend $g=(xy)^\rho$, on voit que $D^q_{ab} S$ sera la puissance $\rho^{\text{ème}}$ de $(\mu y)^m(\nu y)^n\ldots\ldots$

---

§ 4. – Formations diverses.

30. – Soient n formes quelconques semblables, renfermant chacune n coefficients ; si ces formes sont liées par une relation linéair à coefficients constants, il en est de même de leurs transformées par une substitution σ. Par suite, le déterminant des n^2 coefficients de ce formes est un invariant de ces formes ; il est évident d'ailleurs que ce invariant est un combinant.

Supposons maintenant q formes semblables $f_1 = a_{x^p}$, $f_2 = b_{x^p}$ renfermant chacune $p+1$ coefficients, et soit $q < p+1$. Si ces formes so liées par une relation linéaire, ce fait subsiste après une transformation linéaire. Pour l'exprimer il faut écrire que tous les déterminan d'ordre q tirés de la matrice formée par les coefficients sont nuls ; nous allons faire voir que l'on peut aussi écrire simplement qu'un in-variant à une seule série de variables est nul identiquement.

Adjoignons aux formes données les $p+1-q$ suivantes : $x_1^{p-q} g$, $x_1^{p-q-1} x_2 g, \ldots x_2^{p-q} g$, g étant une forme quelconque de degré q. Ces nouvelles formes se transforment après une substitution linéaire en combinaisons linéaires des formes correspondantes $x_1'^{p-q} g'$, $x_1'^{p-q-1} x_2' g'$, $x_2'^{p-q} g'$, évidemment.

Cela étant, si les q formes données sont liées par une relatio linéaire, il en est de même des formes de l'ensemble formé par f_1, f_2 et les formes que nous leur avons adjointes ; et le déterminant qui, égalé à zéro, exprime ce dernier fait est un invariant des f et de g. En particulier, si l'on prend $g = (xy)^q$, ce déterminant devient un

invariant des f avec la seule série de variables (y).

Il faut montrer que les réciproques sont vraies.

Dans le premier cas, $f_1, f_2, \ldots f_q$ et $x_1^{p-q} g, \ldots x_2^{p-q} g$ sont liées par une relation linéaire, g étant arbitraire; il en résulte que: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_q f_q$ est une forme qui peut admettre pour des valeurs convenables des λ, q racines arbitraires, celles de g; si $(a), (b), (c), \ldots$ sont ces racines, on a par suite

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & \ldots & f_q(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & \ldots & f_q(b) \\ f_1(c) & f_2(c) & \ldots & f_q(c) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Entre les éléments des lignes de ce déterminant, on a une même relation linéaire; donc par exemple

$$\varphi_1 f_1(a) + \varphi_2 f_2(a) + \ldots + \varphi_q f_q(a) = 0,$$

les φ_i étant indépendants des (a) si l'on veut. Remplaçant (a) par (x), on voit bien que les f sont liées par une relation linéaire à coefficients constants.

Dans le second cas, lorsque $g = (xy)^p$, on a par hypothèse une relation qui peut se mettre sous la forme

$$\varphi_1(y) f_1 + \varphi_2(y) f_2 + \ldots + \varphi_q(y) f_q + \Psi(x, y)(xy)^q = 0,$$

les φ étant des fonctions entières des (y), non toutes nulles évidemment, et Ψ étant une forme de degré $p-q$ en (x), dont les coefficients sont entiers par rapport aux (y).

En prenant la polaire du premier membre de cette relation rélativement aux (y) remplacés par (y'), nous avons :

$$\left(y'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} + y'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\right) f_1 + \dots + \left(y'_1 \frac{\partial \varphi_q}{\partial y_1} + y'_2 \frac{\partial \varphi_q}{\partial y_2}\right) f_q + (xy)^{q-1} \left[q(xy')\Psi + (xy)\left(y'_1 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} + y'_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}\right) \right] = 0$$

Choisissons (y') de façon que le coefficient de $(xy)^{q-1}$ admette une racine arbitrairement donnée (z); alors on a une relation telle que

$$\varphi_1(y,z) f_1 + \dots + \varphi_q(y,z) f_q + \Psi_1(x,y,z)(xy)^{q-1}(xz) = 0,$$

où la signification des lettres est changée ; les φi sont des fonctions entières de (y) et de (z) ; Ψ_1 est une fonction entière de (x), (y) et (z). Les φi ne peuvent être tous nuls qu'avec Ψ_1 ; mais si les φi et Ψ_1 étaient tous nuls, c'est que les déterminants fonctionnels des $\varphi i\,(y)$ primitifs et de $\Psi(x,y)(xy)^q$ deux à deux seraient nuls ; donc, comme nous le verrons plus loin, les $\varphi i\,(y)$ seraient de la forme $\lambda_i\ \varphi(y)$, λ_i étant une constante, et $\Psi(x,y)(xy)^q$ serait de la forme $\chi(x)\,\varphi(y)$, ce qui est absurde, à moins que $\chi(x)$ ne soit nul ; mais alors les f seraient liés par une relation linéaire à coefficients constants, et la proposition serait démontrée.

On peut évidemment continuer de la même façon, et obtenir finalement une relation de la forme

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_q f_q + \Psi g = 0,$$

g étant une forme de degré q à racines arbitraires, dont les φi et les coefficients des (x) dans Ψ sont fonctions.

Alors on est ramené au cas précédent.

On voit en même temps comment l'on pourrait généraliser, en supposant que g est une forme à racines multiples d'ordre déterminé arbitraires. On est toujours ramené au premier cas, celui où g a toutes ses racines arbitraires.

31. – Les applications du théorème précédent sont nombreuses ; on voit tout de suite en particulier comment il permet d'exprimer d'une façon simple que tous les déterminants tirés d'une matrice sont nuls.

Voici d'autres applications plus directes.

Considérons les dérivées partielles d'ordre h de la forme $f = a_{x^p}$, h étant au plus égal à $\frac{p}{2}$, de sorte que leur nombre est au plus égal à $\frac{p}{2}+1$, et leur degré au moins égal à $\frac{p}{2}$. Il est clair que si ces dérivées partielles sont liées par une relation linéaire, il en sera de même des dérivées partielles correspondantes de la transformée f' de f ; ce fait est donc exprimé par l'évanouissement d'un invariant facile à former

$$T = \begin{vmatrix} a_{p,0} & (p-h)\,a_{p-1,1} & \dots\dots & a_{h,p-h} \\ a_{p-1,1} & (p-h)\,a_{p-2,2} & \dots\dots & a_{p-1,p-h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-h,h} & \dots & \dots & a_{0,p} \\ y_2^{h+1} & -(h+1)\,y_1 y_2^{h} & \dots\dots & 0 \\ 0 & y_2^{h+1} & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & (-1)^{h+1} y_1^{h+1} \end{vmatrix}.$$

En particulier si p est pair, et h égal à $\frac{p}{2}$, cet invariant est indépendant des (y).

Appliquons ce résultat particulier à la polaire d'ordre $2h$ de f, considérée comme fonction de (y) ; on a l'invariant :

$T' =$

$$T' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h}} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-1}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h}\partial x_2^{h}} \\ \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-1}\partial x_2} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{2h-2}\partial x_2^{2}} & \cdots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h-1}\partial x_2^{h+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h}\partial x_2^{h}} & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_1^{h-1}\partial x_2^{h+1}} & \cdots & \frac{\partial^{2h} f}{\partial x_2^{2h}} \end{vmatrix} ;$$

cet invariant ne diffère que par un facteur numérique du précédent ; il suffit, pour s'en assurer, de constater que les termes du plus haut degré en x_1 et y_1 par exemple, sont identiques, ce qui n'offre pas de difficultés.

32.– Soient deux formes $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$; on sait que si ces formes ont au moins q racines communes, et seulement dans ce cas, on peut déterminer deux autres formes f' et g', respectivement des degrés $p'-q$, et $p-q$, telles que l'on ait identiquement $f'f + g'g = 0$.

Ceci revient à dire qu'il existe une relation linéaire entre les formes $x_1^{p'-q} f$, $x_1^{p'-q-1} x_2 f$, ... $x_2^{p'-q} f$, $x_1^{p-q} g$, $x_1^{p-q-1} x_2 g$, ... $x_2^{p-q} g$, en nombre $p+p'-2q+2$, et de degré $p+p'-q$; après une transformation linéaire, il en est de même des formes correspondantes $x_1'^{p'-q} f'$, ... ; donc, si h est une forme arbitraire de degré $p+p'-2q+2$, la condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient au moins q racines communes, s'exprimera en égalant à zéro le déterminant des coefficients dans les formes considérées et dans les formes auxiliaires $x_1^{q-2} h$, $x_1^{q-3} x_2 h$, ... $x_2^{q-2} h$. En particulier si $h = (xy)^{p+p'-2q+2}$, ce

déterminant est un invariant de f et g à une seule série de variables, que l'on peut écrire ainsi :

$$R_q = \left| \begin{array}{cc|ccc|ccc|c}
y_2^{\,p+p'-2q+2} & 0 & 0 & a_{p,0} & 0 & 0 & b_{p',0} & 0 & 0 \\
\vdots & y_2^{\,p+p'-2q+2} & 0 & \vdots & a_{p,0} & 0 & \vdots & b_{p',0} & 0 \\
(-y_1)^{p+p'-2q+2} & \vdots & \vdots & a_{0,p} & \vdots & \vdots & b_{0,p'} & \vdots & \vdots \\
0 & (-y_1)^{p+p'-2q+2} & \vdots & 0 & a_{0,p} & \vdots & 0 & b_{0,p'} & \vdots \\
\vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & (-y_1)^{p+p'-2q+2} & & 0 & a_{0,p} & 0 & 0 & b_{0,p'}
\end{array} \right| ;$$

il y a trois groupes de colonnes, chacun d'eux contient respectivement $q-1,\ p'-q+1,\ p-q+1$ colonnes.

Pour $q=1$ on trouve le résultant sous forme de déterminant.

Supposons qu'il y ait précisément q racines communes ; alors, h étant arbitraire de degré $p+p'-2q$, les formes $x_1^{\,p'-q-1} f, \ldots x_1^{\,p-q-1} g, \ldots x_1^{\,q-1} h, \ldots$ ne sont pas liées par une relation linéaire si h reste arbitraire ; toutefois si h admet l'une des racines communes $(\mu), (\nu) \ldots$, il est clair que ces formes vérifient alors une relation linéaire, puisqu'elles ont une racine commune ; donc en écrivant ce fait, on obtiendra un déterminant de degré q par rapport aux coefficients (c) de h et qui contiendra $c_{\mu\, p+p'-2q}\ \ c_{\nu\, p+p'-2q} \ldots$ en facteur. En particulier, si $h = (xy)^{p+p'-2q}$, ce déterminant sera R_{q+1} et contiendra $(\mu y)(\nu y) \ldots$ à la puissance $p+p'-2q$.

On peut ainsi déterminer les racines communes.

Ce n'est d'ailleurs pas le seul moyen de déterminer les racines communes ; nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet. Nous remarquerons seulement qu'il est facile d'appliquer ce que nous verons

de dire au cas où f et g sont les deux dérivées partielles d'une même forme F ; on obtient alors la condition nécessaire et suffisante pour que ces dérivées partielles aient q racines communes sous la forme d'un déterminant invariant égalé à zéro, et l'on détermine sans peine ces racines communes à l'aide d'une équation analogue.

---

§.5. – Les invariants J. Les Jacobiens et les Hessiens.

---

33. – Soient $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^p}$ deux formes semblables. La fonction

$$J = \sum (-1)^{p_2} \frac{P_p}{P_{p_1} \cdot P_{p_2}} a_{p_1,p_2} b_{p_2,p_1}$$

est un invariant de f et g, car elle vérifie les équations aux dérivées partielles qui caractérisent ces invariants ; cet invariant est d'ordre p. Si f et g sont identiques, J est nul identiquement pour p impair.

Si $f = a_{x^p}$ et $g = b_{x^{p'}}$ sont maintenant deux formes quelconques, leurs polaires d'ordre h considérées comme fonctions des (y) donnent lieu pour la même raison à un invariant d'ordre h de f, g, et des (x) savoir

$$J^h(f,g) = \sum (-1)^{h_2} \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{p'-h}}{P_{p'}} \frac{P_h}{P_{h_1} \cdot P_{h_2}} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h_1} \partial x_2^{h_2}} \frac{\partial^h g}{\partial x_1^{h_2} \partial x_2^{h_1}} ;$$

si f et g sont identiques, cet invariant est nul identiquement pour h impair.

34. – Ces invariants $J^h(f,g)$ sont fort importants ; nous allons les étudier d'un plus plus près pour $h = 1$ et $h = 2$.

Étant donné $f = a_x{}^p$, nous écrirons pour abréger

$$f_1 = \frac{1}{p}\,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ f_2 = \frac{1}{p}\,\frac{\partial f}{\partial x_2},\ f_{11} = \frac{1}{p(p-1)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},\ f_{12} = \frac{1}{p(p-1)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$f_{22} = \frac{1}{p(p-1)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \ldots$$

– Pour $h = 1$, on a en supprimant l'indice h,

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix} = f_1 g_2 - f_2 g_1 .$$

$J(f,g)$ est le <u>Jacobien</u> ou <u>déterminant fonctionnel</u> de f et g. Si l'on met en évidence les racines de f et g, soit

$$f = (x\alpha)\ (x\beta) \ldots,$$

$$g = (x\mu)\ (x\nu) \ldots,$$

un calcul facile donne

$$J = \frac{fg}{pp'} \sum \frac{(\alpha\mu)}{(x\alpha)(x\mu)} .$$

Les équations

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = f, \qquad x_1 g_1 + x_2 g_2 = g,$$

donnent
$$x_1 J(f,g) = f g_2 - g f_2$$
$$x_2 J(f,g) = -f g_1 + g f_1 .$$

Si $J(f,g)$ est nul identiquement, on a donc

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{p'}{p}\,\frac{df}{dg},$$

df et dg étant les différentielles de f et g ; on en tire

$$f^{p'} = C g^p,$$

C désignant une constante.

Si $p' = p$, on a simplement $f = Cg$; f et g sont identiques à un facteur près : elles sont liées par une relation linéaire.

En écrivant ce fait comme nous l'avons dit au N° 30, on obtiendrait $J(f,g)$ sous une forme différente.

Si f et g ont une racine commune, appartenant q fois à f et q' fois à g, on voit encore sur les formules précédentes que $J(f,g)$ admet ce facteur $q+q'-1$ fois au moins, et l'admet certainement $q+q'$ fois, si $pq'-p'q=0$, et seulement dans ce cas; il suffit de supposer que le facteur commun à f et g est x, par exemple. En particulier si $q=q'=1$, et si $p=p'$ on voit que toute racine commune à f et g est double pour $J(f,g)$ et par suite annule les dérivées partielles de $J(f,g)$. On peut en tirer une méthode pour former le résultant de f et g : nous n'insisterons pas sur ce point.

35. – Dans le cas de $h=2$, il vient

$$J^2(f,g)=f_{11}g_{22}-2f_{12}g_{12}+f_{22}g_{11},$$

et en fonction des racines

$$J^2(f,g)=\frac{2fg}{p(p-1)p'(p'-1)}\sum\frac{(\alpha\mu)(\beta\nu)+(\alpha\nu)(\beta\mu)}{(x\alpha)(x\beta)(x\mu)(x\nu)}.$$

Si f et g sont identiques,

$$J^2(f,f)=2(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)=2\begin{vmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{12} & f_{22}\end{vmatrix};$$

$J^2(f,f)$ est le Hessien de la forme f.

On a aussi

$$J^2(f,f)=-\frac{2f^2}{p^2(p-1)^2}\sum\left[\frac{(\alpha\beta)^2}{(x\alpha)^2(x\beta)^2}+\frac{2(\alpha\beta)(\alpha\gamma)}{(x\alpha)^2(x\beta)(x\gamma)}\right];$$

d'ailleurs on a des identités telles que

$$\frac{(\alpha\beta)}{(x\alpha)(x\beta)}+\frac{(\beta\gamma)}{(x\beta)(x\gamma)}+\frac{(\gamma\alpha)}{(x\gamma)(x\alpha)}=0;$$

élevant au carré, et ajoutant, on a :

$$(p-2)\sum\frac{(\alpha\beta)^2}{(x\alpha)^2(x\beta)^2}-\sum\frac{2(\alpha\beta)(\alpha\gamma)}{(x\alpha)^2(x\beta)(x\gamma)}=0;$$

et par suite, on a simplement :

$$J^2(f,f) = -\frac{2f^2}{p^2(p-1)} \sum \frac{(\alpha\beta)^2}{(x\alpha)^2(x\beta)^2} \ .$$

$J^2(f,f)$ est le déterminant T' du N° 31 pour $h=1$; on pourra donc l'écrire sous la forme du déterminant T. $J^2(f,f)$ est au facteur 2 près le jacobien des dérivées partielles f_1 et f_2 ; si f a une racine multiple de degré q, $J^2(f,f)$ admet cette racine $2q-2$ fois ; si $J^2(f,f)$ est nul identiquement f_1 et f_2 sont proportionnels, et f est la puissance $p^{\text{ème}}$ d'une forme linéaire.

36. – Trois formes $f = a_{x^p}$; $g = b_{x^{p'}}$, $h = c_{x^{p''}}$, ont pour invariant la fonction

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} ,$$

qui est le déterminant des coefficients de leurs polaires du second ordre. Écrivons encore :

$$2H = \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} \\ g_{22} & -2g_{12} & g_{11} \\ h_{22} & -2h_{12} & h_{11} \end{vmatrix} ,$$

et multiplions ces deux déterminants ; on a la relation

$$2H^2 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) \end{vmatrix} ,$$

identité importante.

Prenons $h = (xy)^2$, et dans H remplaçons les (y) par les (x) ;

on voit tout de suite en se servant des relations

$$x_1 f_{11} + x_2 f_{12} = f_1\,, \quad x_1 f_{12} + x_2 f_{22} = f_2\,,$$

que H devient J(f,g). On a donc

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix},$$

et en procédant comme plus haut :

$$2\left[J(f,g)\right]^2 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & f \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & g \\ f & g & 0 \end{vmatrix}.$$

Ceci suppose toutefois p et p' supérieurs à 1. — On peut multiplier les formules de ce genre ; nous citerons encore celle-ci : multipliant les déterminants :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} & 0 \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} & 0 \\ k_{11} & k_{12} & k_{22} & 0 \end{vmatrix} \quad \& \quad \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} & 0 \\ g_{22} & -2g_{12} & g_{11} & 0 \\ h_{22} & -2h_{12} & h_{11} & 0 \\ k_{22} & -2k_{12} & k_{11} & 0 \end{vmatrix}$$

où K désigne une quatrième forme quelconque, on obtient

$$0 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & J^2(f,k) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & J^2(g,k) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & J^2(h,k) \\ J^2(f,k) & J^2(g,k) & J^2(h,k) & J^2(k,k) \end{vmatrix};$$

et en supposant $k = (xy)^2$, et remplaçant les (y) par les (x) :

$$0 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & f \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & g \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & h \\ f & g & h & 0 \end{vmatrix}.$$

Chapitre III.

Les systèmes linéaires et quadratiques.

§ 1. _ Les systèmes linéaires. Rapport anharmonique.

37. _ Considérons d'abord un système S composé de n séries de variables $(x), (y), (z), (t), \dots$

Les déterminants tels que (xy) en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$ sont des invariants de S ; ils forment un système complet ; ils sont liés par des relations, car $2n-3$ seulement d'entre eux sont indépendants ; on peut choisir pour ceux-là les déterminants

$$(xy), (xz), (xt), \dots\dots$$
$$(yz), (yt), \dots\dots$$

et tout autre déterminant tel que (zt) est lié à ceux-là par la relation

$$(xy)(zt) + (xz)(ty) + (xt)(yz) = 0.$$

Tous ces invariants sont d'ordre -1.

Soit le système S composé de variables $(x), (y), \dots$ et de formes linéaires que nous écrirons $a_1 x_1 + a_2 x_2$, $b_1 x_1 + b_2 x_2$, $\dots$, ou, en remplaçant a_1 par α_2 et a_2 par $-\alpha_1$, $\dots$

$$(x\alpha), (x\beta), \dots$$

Alors en remarquant que si $(x\alpha)$ se change en $(x'\alpha')$ par une substitution σ, on a

$$\alpha_1 = \frac{1}{\delta}(\lambda_{11}\alpha'_1 + \lambda_{12}\alpha'_2)$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\delta}(\lambda_{21}\alpha'_1 + \lambda_{22}\alpha'_2) ;$$

on voit que l'on est ramené au cas précédent.

On aura un système complet d'invariants formé par les déterminants tels que (xy), $(x\alpha)$, $(\alpha\beta)$, avec des relations faciles à établir ; $(\alpha\beta)$ est aussi le résultant de $(x\alpha)$ et $(x\beta)$. Les invariants des trois types (xy), $(x\alpha)$, $(\alpha\beta)$, seront respectivement des ordres -1, 0 et 1.

38. – Revenons au premier cas : les invariants absolus du système, intéressants au point de vue géométrique, ou simplement <u>les invariants absolus géométriques</u> sont de la forme
$$k = \frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}.$$

Un tel invariant est appelé le <u>rapport anharmonique</u> des quatre éléments (x), (y), (z), (t), pris dans l'ordre où ils sont écrits, et est représenté par la notation abrégée
$$k = (xyzt).$$

Il est facile de voir que le rapport anharmonique défini de cette façon ne diffère pas du rapport anharmonique défini par des considérations géométriques directes, lorsque les éléments (x), (y), ... sont des points en ligne droite, ou des droites passant par un point dans un plan, etc.

Le second cas se ramène immédiatement au premier, si l'on remarque que la forme $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ou $(x\alpha)$ égalée à zéro définit l'unique élément (α), et que par suite cette forme est équivalente à la connaissance de l'élément (α) au point de vue géométrique.

39. – Avec quatre éléments (x), (y), (z), (t), pris dans un ordre

quelconque, on peut former 24 rapports anharmoniques ; mais il est évident que, si dans l'expression $(xyzt)$, on permute entre eux deux éléments quelconques et en même temps les deux autres, le nouveau rapport anharmonique ainsi formé ne diffère pas du premier. Il n'y a donc en réalité que six rapports anharmoniques distincts formés avec quatre éléments. On peut les écrire

$$k_1 = (xyzt) = \frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}, \quad k'_1 = (xytz) = \frac{(xt)(yz)}{(xz)(yt)},$$

$$k_2 = (xzty) = \frac{(xt)(zy)}{(xy)(zt)}, \quad k'_2 = (xzyt) = \frac{(xy)(zt)}{(xt)(zy)},$$

$$k_3 = (xtyz) = \frac{(xy)(tz)}{(xz)(ty)}, \quad k'_3 = (xtzy) = \frac{(xz)(ty)}{(xy)(tz)}.$$

On a d'abord $k_1 k'_1 = k_2 k'_2 = k_3 k'_3 = 1$,

puis à cause de l'identité

$$(xy)(zt) + (xz)(ty) + (xt)(yz) = 0,$$

il vient

$$1 - k_2 - \frac{1}{k_3} = 0,$$

$$1 - k_3 - \frac{1}{k_1} = 0,$$

$$1 - k_1 - \frac{1}{k_2} = 0,$$

et par suite, en fonction de k_1, on a

$$k'_1 = \frac{1}{k_1}, \quad k_2 = \frac{1}{1-k_1}, \quad k'_2 = 1 - k_1, \quad k_3 = \frac{k_1 - 1}{k_1}, \quad k'_3 = \frac{k_1}{k_1 - 1}.$$

Il peut arriver que deux ou plusieurs de ces rapports deviennent égaux. On a les différents cas suivants :

1° a) $k_1 = k'_1 = 1$; alors $k_2 = k'_3 = \infty$, $k_3 = k'_2 = 0$.

(x) et (y) coïncident, ou bien (z) & (t).

b) $k_1 = k'_3 = 0$; alors $k_2 = k'_2 = 1$, $k_3 = k'_1 = \infty$

(x) & (z) coïncident, ou bien $(y$ & $t)$.

c) $k_1 = k'_2 = \infty$; alors $k_2 = k'_1 = 0$; $k_3 = k'_3 = 1$.

(x) & (t) coïncident, ou bien (y) & (z).

2° a) $k_1 = k'_1 = -1$; alors $k_2 = k'_3 = \frac{1}{2}$, $k_3 = k'_2 = 2$.

On dit dans ce cas que (x) et (y) sont <u>conjugués harmoniques</u> par rapport à (y) et (t).

b) $k_1 = k'_3 = 2$; alors $k_2 = k'_2 = -1$, $k_3 = k'_1 = \frac{1}{2}$.

(x) & (z) sont conjugués harmoniques par rapport à (y) & (t).

c) $k_1 = k'_2 = \frac{1}{2}$; alors $k_2 = k'_1 = 2$, $k_3 = k'_3 = -1$.

(x) & (t) sont conjugués harmoniques par rapport à (y) & (z).

3° ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité :

$$k_1 = k_2 = k_3 = -\omega, \quad k'_1 = k'_2 = k'_3 = -\omega^2.$$

On dit alors que les quatre éléments (x), (y), (z), (t), sont en proportion <u>équianharmonique</u>.

En particulier, on voit que si deux des quatre éléments donnés (x), (y), (z), (t), coïncident, les rapports anharmoniques ont deux par deux les valeurs 0, 1, ∞. Il en est de même si les quatre éléments coïncident deux par deux. Si trois au moins des quatre éléments coïncident, les rapports anharmoniques sont indéterminés.

Dans les cas particuliers examinés, les équations qui définissent les rapports anharmoniques, sont en appelant $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ l'inconnue,

1° $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 0$, $\rho_1 - \rho_2 = 0$;

2° $\rho_1 + \rho_2 = 0$, $\rho_1 - 2\rho_2 = 0$, $\rho_2 - 2\rho_1 = 0$;

3° $\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = 0$.

Entre les premiers membres de ces équations existe l'identité remarquable :

$$27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2 + (\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2 = 4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3.$$

Enfin nous remarquerons qu'un élément (x) est défini sans ambiguïté par la condition que le rapport anharmonique $(xyzt)$ ait une valeur donnée, (y), (z), (t) étant donnés.

Il y a indétermination si ces trois éléments coïncident, ou bien si (z) et (t) coïncident avec $(xyzt)=1$; ou bien si (y) et (t) coïncident, avec $(xyzt)=0$; ou bien si (y) et (z) coïncident avec $(xyzt)=\infty$.

40. – Au n° 27, nous avons obtenu la formule :

$$D^h_{xy}.f = \frac{P_h\, P_{p-h}}{P_p} f \sum_h \frac{(y\alpha)(y\beta)\ldots\ldots(y\xi)}{(x\alpha)(x\beta)\ldots\ldots(x\xi)},$$

l'indice h indiquant que (α), (β), ... (ξ), sont en nombre h. La condition $D^h_{xy}f=0$ peut donc s'écrire, en divisant tous les termes par l'un d'eux et désignant par (μ), (ν), ... (τ) h racines fixes quelconques de f :

$$\sum_h (xy\mu\alpha)(xy\nu\beta)\ldots(xy\tau\xi)=0.$$

Cette relation définit géométriquement les éléments (x) qui forment le système polaire d'ordre h de (y) par rapport à f. Pour $h=1$ en particulier, on a :

$$\sum (xy\mu\alpha)=0,$$

(μ) étant une racine fixe quelconque de f.

---

§ 2. – Propriétés de l'homographie La forme bilinéaire.

---

41. – Soient dans deux espaces homographiques quelconques

quatre couples d'éléments correspondants (x) et (x'), (y) et (y'), (z) et (z'), (t) et (t'). Le rapport anharmonique étant un invariant absolu, on a évidemment :

$$(xyzt) = (x'y'z't');$$

réciproquement, si tous les groupes de quatre couples d'éléments correspondants dans deux espaces quelconques, vérifient cette relation, ces deux espaces sont homographiques. Ceci résulte de ce que trois couples d'éléments correspondants déterminent une homographie, et que le rapport anharmonique $(xyzt)$ détermine (x) d'une façon unique quand $(y), (z), (t)$, sont donnés.

On peut raisonner directement ainsi. Une homographie est caractérisée par la relation

$$\frac{x_1}{\lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2} = \frac{x_2}{\lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2};$$

nous avons donc les quatre relations :

$$\lambda_{21} x_1 x'_1 + \lambda_{22} x_1 x'_2 - \lambda_{11} x_2 x'_1 - \lambda_{12} x_2 x'_2 = 0,$$

$$\lambda_{21} y_1 y'_1 + \lambda_{22} y_1 y'_2 - \lambda_{11} y_2 y'_1 - \lambda_{12} y_2 y'_2 = 0,$$

. . . .

d'où

$$\begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 x'_2 & x_2 x'_1 & x_2 x'_2 \\ y_1 y'_1 & y_1 y'_2 & y_2 y'_1 & y_2 y'_2 \\ z_1 z'_1 & z_1 z'_2 & z_2 z'_1 & z_2 z'_2 \\ t_1 t'_1 & t_1 t'_2 & t_2 t'_1 & t_2 t'_2 \end{vmatrix} = 0,$$

et en développant par la règle de Laplace

$$\sum (x_1 y_1 z_2 t_2 + x_2 y_2 z_1 t_1)(x'y')(z't') = 0.$$

D'ailleurs, on a

$$\sum (x'y')(z't') = 0.$$

On en tire par comparaison avec la précédente relation :

$$\frac{(x'y')(z't')}{(xy)(zt)} = \frac{(x'z')(t'y')}{(xz)(ty)} = \frac{(x't')(y'z')}{(xt)(yz)},$$

relations qui montrent bien que l'égalité des rapports anharmoniques formés avec les éléments correspondants caractérise l'homographie ; puisqu'inversement si ces relations ont lieu, on en déduit l'existence des (λ).

A la vérité, il n'est pas sûr que les λ vérifieront la condition $\delta \neq 0$. Ceci nous amène à envisager ce qui se passe dans cette hypothèse, qui caractérise ce que nous appellerons une homographie <u>singulière</u>. Si A et A' sont les éléments représentés respectivement par

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}}, \quad \frac{x'_2}{x'_1} = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} = -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}},$$

on voit qu'à tout élément (x) ou (x') autre que A ou A' correspond l'élément A' ou A ; aux éléments A ou A' correspondent tous les éléments (x') ou (x).

42. - Supposons que deux espaces coïncidants soient homographiques et que ces deux espaces soient rapportés aux mêmes coordonnées, ce qui ne diminue pas la généralité. Si (x) et (y) sont deux éléments correspondants, on a

$$\frac{x_1}{\lambda_{11} y_1 + \lambda_{12} y_2} = \frac{x_2}{\lambda_{21} y_1 + \lambda_{22} y_2};$$

en faisant $\lambda_{21} = a_{11}$, $\lambda_{22} = a_{12}$, $-\lambda_{11} = a_{21}$, $-\lambda_{12} = a_{22}$,

on peut écrire $f = 0$, si l'on pose :

$$f = a_{xy} = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2.$$

Nous sommes ainsi amenés à l'étude de la forme bilinéaire f,

où nous avons modifié l'écriture générale des coefficients, pour simplifier. Pour distinguer les deux séries homographiques qui remplissent l'espace considéré, nous appellerons l'une X et l'autre Y : $f=0$ est la relation qui lie les éléments correspondants (x) et (y), (x) appartenant X, (y) à Y.

Nous allons étudier le système S formé par f et les variables (x) & (y).

Des invariants évidents sont f, la forme g que l'on déduit de f en permutant les (x) et les (y), les formes h et k que l'on déduit de f ou g en y remplaçant les (y) par les (x) et les (x) par les (y), et la forme (xy). Ces cinq invariants sont absolus, sauf le dernier qui est d'ordre -1.

On a d'ailleurs les identités:

$$f-g=(a_{12}-a_{21})(xy),$$
$$fg-hk=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(xy)^2,$$

de sorte que :

$$i=a_{12}-a_{21}, \quad \& \quad j=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

sont invariants proprement dits, respectivement des ordres 1 et 2. Les sept invariants $f, g, h, k, (xy), i, j$, dont cinq seulement sont indépendants, forment un système complet.

On voit que la forme f seule, qui ne dépend que de quatre coefficients, admet cependant deux invariants distincts i et j, et par suite un invariant absolu $\frac{i^2}{j}$, géométrique : c'est là un fait exceptionnel.

43. – Il est facile d'interpréter géométriquement ces divers invariants.

$(xy) = 0$ exprime la coïncidence de (x) & (y).

$f = 0$ est la relation qui lie (x) appartenant à X, et (y) correspondant de (x), appartenant à Y.

$g = 0$ est la relation qui lie (x) appartenant à Y, et (y) correspondant de (x) appartenant à X.

Pour $i = 0$, on a $f - g = 0$, et réciproquement; par suite (x) a toujours même correspondant, qu'il soit considéré comme appartenant à X ou à Y, et ceci n'a lieu que dans ce cas; on dit qu'il y a involution.

Pour $j = 0$, l'homographie est singulière.

$h = 0$, ou $k = 0$, définit deux éléments qui sont dits doubles, parceque chacun d'eux se correspond à lui-même. Ce sont les seuls éléments jouissant de cette propriété, si l'on écarte le cas de $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$, dans lequel les deux séries X et Y sont confondues.

On peut chercher directement ces éléments doubles, en résolvant les équations

$$\frac{x_1}{-a_{21}x_1 - a_{22}x_2} = \frac{x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2},$$

qui, en appelant $\frac{1}{\rho}$ la valeur commune de ces rapports, deviennent :

$$(a_{21} + \rho)x_1 + a_{22}x_2 = 0,$$

$$a_{11}x_1 + (a_{12} - \rho)x_2 = 0;$$

avec

$$\begin{vmatrix} a_{21} + \rho & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\rho^2 - i\rho + j = 0;$$

et l'on retrouve ainsi les invariants i et j.

Les éléments doubles sont confondus pour $i^2 - 4j = 0$.

Lorsque $j = 0$, c'est-à-dire quand l'homographie est singulière, les éléments doubles sont précisément les deux éléments de X et Y

qui ont une infinité de correspondants dans Y et X ; ils sont confondus si en même temps $i = 0$; il y a alors involution singulière.

44. — Cherchons une forme canonique pour f ; si les éléments doubles sont confondus en un même élément, on prendra cet élément pour l'élément fondamental O_2 ; alors f aura la forme simple

$$a_{11}\, x_1 y_1 + a_{12} (x_1 y_2 - x_2 y_1) ;$$

a_{11} n'est pas nul ; si $a_{12} = 0$, il y a involution singulière.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas.

Les éléments doubles étant supposés distincts, choisissons-les pour éléments fondamentaux O_1 et O_2 ; f a alors la forme simple :

$$f = a_{12}\, x_1 y_2 + a_{21}\, x_2 y_1 ;$$

$a_{12} + a_{21}$ n'est pas nul ; si $a_{12} a_{21}$ est nul, l'homographie est singulière.

Par quelles transformations peut-on passer de la forme générale $\quad f = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$

à la forme canonique $\quad f = a'_{12} x'_1 y'_2 + a'_{21} x'_2 y'_1$?

Soit (z) un élément arbitraire ; on a d'après les identités déjà données :

$$\begin{aligned} h(x)\, h(z) &= f(x,z)\, g(x,z) + j\,(x\,z)^2 \\ &= f^2(x,z) - i\,(x\,z)\, f(x,z) + j\,(x\,z)^2 \\ &= \left(f(x,z) - (x\,z)\, \frac{i + \sqrt{i^2 - 4j}}{2}\right)\left(f(x,z) - (x\,z)\, \frac{i - \sqrt{i^2 - 4j}}{2}\right) ; \end{aligned}$$

puisque $h(x)$ doit se transformer en $(a'_{12} + a'_{21})\, x'_1 x'_2$, posons :

$$\begin{cases} x'_1 = f(x,z) - (x\,z)\, \dfrac{i + \sqrt{i^2 - 4j}}{2}, \\ x'_2 = f(x,z) - (x\,z)\, \dfrac{i - \sqrt{i^2 - 4j}}{2} ; \end{cases}$$

et de même

$$\begin{cases} y_1' = f'(y.z) - (yz)\,\dfrac{i+\sqrt{i^2-4j}}{2}, \\ y_2' = f'(y.z) - (yz)\,\dfrac{i-\sqrt{i^2-4j}}{2}; \end{cases}$$

le déterminant de la substitution linéaire ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est $\dfrac{-1}{h(z)\sqrt{i^2-4j}}$, comme le montre un calcul facile ; écrivons maintenant que i et h sont des invariants des ordres 1 et 0 ; on a

$$a'_{12} - a'_{21} = -\frac{i}{h(z)\sqrt{i^2-4j}},$$

$$a'_{12} + a'_{21} = \frac{1}{h(z)},$$

équations qui déterminent a'_{12} et a'_{21} sans ambiguïté.

45. – Soient (x) et (y) deux éléments correspondants, A_1 et A_2 les deux éléments doubles ; cherchons le rapport anharmonique (xyA_1A_2). Si nous transformons d'abord f de façon à lui donner la forme canonique ci-dessus, nous aurons :

$$(xyA_1A_2) = \frac{x_2'y_1'}{x_1'y_2'} = -\frac{a'_{12}}{a'_{21}} = \frac{i-\sqrt{i^2-4j}}{i+\sqrt{i^2-4j}};$$

on voit que ce rapport a une valeur constante K qui dépend de l'invariant absolu géométrique $\dfrac{i^2}{j}$.

Dans le cas de l'involution, et seulement dans ce cas, on a $i=0$ et par suite $K=-1$. L'involution est donc caractérisée par ce fait que les éléments doubles sont conjugués harmoniques par rapport à deux éléments correspondants quelconques.

Pour définir une involution, il est nécessaire et suffisant de connaître deux couples d'éléments correspondants, en particulier les 2 éléments doubles.

Puisque dans l'involution on a $a_{12} = a_{21}$, c'est-à-dire que f est symétrique en (x) et (y), la condition nécessaire et suffisante pour que trois couples d'éléments (x) et (x'), (y) et (y'), (z) et (z') appartiennent à une même involution est

$$\begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 x'_2 + x_2 x'_1 & x_2 x'_2 \\ y_1 y'_1 & y_1 y'_2 + y_2 y'_1 & y_2 y'_2 \\ z_1 z'_1 & z_1 z'_2 + z_2 z'_1 & z_2 z'_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 x'_2 & x_2 x'_1 & x_2 x'_2 \\ y_1 y'_1 & y_1 y'_2 & y_2 y'_1 & y_2 y'_2 \\ z_1 z'_1 & z_1 z'_2 & z_2 z'_1 & z_2 z'_2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{(x x')} \begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 x'_2 & x_2 x'_1 & x_2 x'_2 \\ y_1 y'_1 & y_1 y'_2 & y_2 y'_1 & y_2 y'_2 \\ z_1 z'_1 & z_1 z'_2 & z_2 z'_1 & z_2 z'_2 \\ x_1 x'_1 & x_2 x'_1 & x_1 x'_2 & x_2 x'_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, en supposant $(x x') \neq 0$, et appliquant un résultat antérieur, l'on déduit que les deux séries de quatre éléments $(x), (y), (z), (x')$ et $(x'), (y'), (z'), (x)$, sont en correspondance homographique et ont leurs rapports anharmoniques égaux. Cette propriété caractérise l'involution.

Comme application, on voit que si M et M', N et N', sont deux couples d'éléments correspondants dans une homographie dont les éléments doubles sont A_1 et A_2, les trois couples A_1 et A_2, M et N', M' et N appartiennent à une même involution.

De même, si A est un des éléments doubles d'une involution

définie par les couples M et M′, N et N′, on a

$$(AMNN') = \frac{1}{(AM'NN')}$$

---

§. 3. – Les systèmes quadratiques.

46. – Soit, en simplifiant l'écriture des coefficients

$$f = a_{x^2} = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = (x\alpha)(x\beta),$$

une forme quadratique, dont (α) et (β) sont les racines.

Les invariants du système formé par f et les (x) sont f, d'ordre zéro, et son hessien, d'ordre 2. – Nous poserons, en divisant ce hessien $J^2(f,f)$ par 2,

$$D = a_0 a_2 - a_1^2 ;$$

D est un invariant proprement dit de f, qui ne dépend que de trois coefficients ; ici encore nous nous trouvons dans un cas exceptionnel.

En fonction des racines, on a $D = -\frac{1}{4}(\alpha\beta)^2$;

D est donc aussi le discriminant de f à un facteur près.

Si $D=0$, f est carré parfait et peut prendre la forme canonique

$$f = a_0 x_1^2 ;$$

si $D \neq 0$, f a ses racines distinctes ; en leur faisant correspondre les éléments fondamentaux, ou bien deux éléments conjugués harmoniques par rapport aux éléments fondamentaux, on aura l'une ou l'autre des deux formes canoniques :

$$f = 2 a_1 x_1 x_2 \quad , \quad f = a_0 x_1^2 + a_2 x_2^2 .$$

Si l'on considère le système formé par f et des variables (x), (y), (z), (t), ... un système complet d'invariants est constitué par les

quantités $D, a_{x^2}, \dots a_{xy}, \dots (xy), \dots$ liées entre elles par de nouvelles relations telles que

$$a_{xz}a_{yt} - a_{xt}a_{yz} = D(xy)(zt).$$

En particulier, on a l'identité :

$$a_{x^2}a_{y^2} = a_{xy}^2 + D(xy)^2$$
$$= \left(a_{xy} + (xy)\sqrt{-D}\right)\left(a_{xy} - (xy)\sqrt{-D}\right),$$

formules qui fournissent le moyen le plus général de décomposer f en une somme de deux carrés, ou de résoudre l'équation $f=0$, en ne faisant intervenir que des invariants.

La polaire a_{xy} est égale à $\frac{1}{2}\left((x\alpha)(y\beta)+(x\beta)(y\alpha)\right)$; si donc $a_{xy}=0$, (x) et (y) sont conjugués harmoniques par rapport à (α) et (β). En d'autres termes, la forme bilinéaire a_{xy} définit une involution dont les racines de f sont les éléments doubles.

Réciproquement, toute involution peut être envisagée de cette façon.

47.– Soient deux formes quadratiques

$$f = a_{x^2} = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2 = (x\alpha)(x\beta),$$
$$g = b_{x^2} = b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2 = (x\gamma)(x\delta).$$

Le système (f,g) a comme invariants formant un système fondamental et complet à la fois,

$$D = \tfrac{1}{2}J^2(f,f) = a_0a_2 - a_1^2, \quad D' = \tfrac{1}{2}J^2(g,g) = b_0b_2 - b_1^2,$$
$$H = J^2(f,g) = a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1;$$

d'ailleurs

$$H = \tfrac{1}{2}\left((\alpha\gamma)(\beta\delta) + (\alpha\delta)(\beta\gamma)\right).$$

Un invariant absolu géométrique est $\frac{DD'}{H^2}$.

Si k représente l'un des rapports anharmoniques $(\alpha\beta\gamma\delta)$ ou $(\alpha\beta\delta\gamma)$ des quatre racines de f et g associées deux par deux, on

trouve sans peine

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \frac{4DD'}{H}.$$

On a $H=0$ et $k=-1$ en même temps ; les racines de f sont alors conjuguées harmoniques par rapport à celles de g.

Si $k=0$ ou $k=\infty$ on a $4DD'-H^2=0$; les deux formes ont une racine commune, de sorte que leur résultant est à un facteur numérique près

$$R = 4DD' - H^2.$$

48. – Envisageons le système formé par f, g, et les (x) ; on aura les invariants nouveaux f, g et

$$J = J(f,g) = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_2^2,$$

qui, avec ceux déjà indiqués, forment un système complet.

On a $\qquad J = \frac{1}{4} \Sigma (\alpha \gamma)(x \beta)(x \delta).$

On a aussi l'identité (36)

$$-J^2 = D' f^2 - H f g + D g^2,$$

qui relie les six invariants f, g, J, D, D', H, entre eux.

J est une forme quadratique ; son invariant est $\frac{R}{4}$.

f et g sont identiques à un facteur près si J est nul identiquement et réciproquement.

Si f et g ont une racine commune et une seule, on a $R=0$, et J est un carré parfait dont la racine carrée est le facteur commun à f et à g ; on obtient aussi ce facteur linéairement, en prenant la polaire de J, quels que soient les (y),

$$J_{xy} = x_1 \left[(a_0 b_1 - a_1 b_0) y_1 + \tfrac{1}{2} (a_0 b_2 - a_2 b_0) y_2 \right] + x_2 \left[\tfrac{1}{2} (a_0 b_2 - a_2 b_0) y_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_2 \right].$$

Dans le cas général, on a $J^2(J,f) = J^2(J,g) = 0$, et par suite $J = 0$ représente les éléments doubles de l'involution définie par les deux couples $f = 0$, $g = 0$.

Un couple quelconque de cette involution est représenté par une équation telle que $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, et réciproquement. En effet, si les éléments définis par trois formes f, g, h, sont les couples d'une même involution dont les éléments doubles sont définis par $k = 0$ on a

$$J^2(f,k) = J^2(g,k) = J^2(h,k) = 0,$$

et l'on en déduit immédiatement que le déterminant des coefficients de f, g, h, est nul, c'est-à-dire que ces formes sont liées par une relation linéaire.

On voit que le <u>faisceau</u> de formes $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ correspond à une involution ; l'étude directe de ce faisceau permet de retrouver quelques uns des résultats précédents.

L'invariant de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est

$$\lambda_1^2 D + \lambda_1 \lambda_2 H + \lambda_2^2 D' ;$$

s'il est nul, $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est un carré parfait et représente l'un des éléments doubles de l'involution, éliminant les (λ) entre les équations

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0 \text{ et } \lambda_1^2 D + \lambda_1 \lambda_2 H + \lambda_2^2 D' = 0 ,$$

le résultant $\quad D' f^2 - H f g + D g^2$

ne doit donc différer de J^2 que par un facteur numérique ; et en effet, c'est $-J^2$

49. – Si J n'est pas nul identiquement, et si $R = 0$, f et g ayant une racine commune et une seule, peuvent être ramenés à la forme canonique simultanée

$$f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 ,$$
$$g = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 ,$$

que l'on peut encore simplifier un peu suivant les circonstances.

Dans le cas général où $R \neq 0$, prenons pour éléments fondamentaux 0_1 et 0_2 les deux éléments distincts définis par $J=0$; alors il est clair que f et g prendront la forme

$$f = a_0 x_1^2 + a_2 x_2^2 ,$$
$$g = b_0 x_1^2 + b_2 x_2^2 ,$$

et l'on aura $D = a_0 a_2$, $D' = b_0 b_2$, $H = a_0 b_2 + a_2 b_0$,

$$R = -(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 , \quad J = (a_0 b_2 - a_2 b_0) x_1 x_2 .$$

Voici comment on peut exécuter la réduction de f et g à la forme canonique.

On a :

$$J_{x^2} J_{y^2} = \left(J_{xy} + (xy)\sqrt{-\tfrac{R}{4}}\right)\left(J_{xy} - (xy)\sqrt{-\tfrac{R}{4}}\right),$$

les (y) étant des indéterminées.

Soit alors :
$$\begin{cases} x'_1 = J_{xy} + (xy)\sqrt{-\tfrac{R}{4}} , \\ x'_2 = J_{xy} - (xy)\sqrt{-\tfrac{R}{4}} , \end{cases}$$

$$f = a'_0 x_1'^2 + a'_2 x_2'^2 , \quad g = b'_0 x_1'^2 + b'_2 x_2'^2 ;$$

le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est $\frac{1}{J_{y^2}\sqrt{-R}}$; écrivant donc que D, D', H, f, g, J, sont des invariants, on a

$$a'_0 a'_2 = -\frac{D}{R J_{y^2}^2} , \quad b'_0 b'_2 = -\frac{D'}{R J_{y^2}^2} , \quad a'_0 b'_2 + a'_2 b'_0 = -\frac{H}{R J_{y^2}^2} ,$$

$$a'_0 + a'_2 = \frac{a_{y^2}}{J_{y^2}^2} , \quad b'_0 + b'_2 = \frac{b_{y^2}}{J_{y^2}^2} , \quad a'_0 b'_2 - a'_2 b'_0 = \frac{1}{J_{y^2}^2 \sqrt{-R}} ,$$

les deux premières relations de la dernière ligne résultant de ce que

l'on a fait les (x) égaux aux (y).

On a par suite, sans ambiguïté,

$$a'_0 = \frac{1}{2J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left(Ha_{y^2} - 2Db_{y^2} + a_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$

$$a'_2 = \frac{1}{2J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left(-Ha_{y^2} + 2Db_{y^2} + a_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$

$$b'_0 = \frac{1}{2J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left(-Hb_{y^2} + 2D'a_{y^2} + b_{y^2}\sqrt{-R}\right),$$

$$b'_2 = \frac{1}{2J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left(Hb_{y^2} - 2D'a_{y^2} + b_{y^2}\sqrt{-R}\right).$$

En remarquant que

$$2J(J,f) = -Hf + 2Dg,$$
$$2J(J,g) = Hg - 2D'f,$$

on peut écrire encore

$$f = \frac{1}{J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left(\left\{J(a_{y^2}, J_{y^2}) + a_{y^2}\sqrt{\frac{-R}{4}}\right\}x_1'^2 + \left\{-J(a_{y^2}, J_{y^2}) + a_{y^2}\sqrt{\frac{-R}{4}}\right\}x_2'^2\right).$$

Plus généralement, si $h = \lambda_1 f + \lambda_2 g = c_{x^2}$, on aura:

$$h = \frac{1}{J_{y^2}^2\sqrt{-R}}\left[\left\{J(c_{y^2}, J_{y^2}) + c_{y^2}\sqrt{\frac{-R}{4}}\right\}x_1'^2 + \left\{-J(c_{y^2}, J_{y^2}) + c_{y^2}\sqrt{\frac{-R}{4}}\right\}x_2'^2\right].$$

Dans ces formules, il est clair que $\sqrt{-R} = 2\sqrt{\frac{-R}{4}}$, et que $J(c_{y^2}, J_{y^2})$ désigne le jacobien des formes h et J, où les (x) sont remplacés par les (y).

50. – Considérons trois formes quadratiques $f = a_{x^2}$, $g = b_{x^2}$, $h = c_{x^2}$; les invariants de f, g, h formant un système complet sont

$\frac{1}{2}J^2(f,f)$, $\frac{1}{2}J^2(g,g)$, $\frac{1}{2}J^2(h,h)$, $J^2(g,h)$, $J^2(h,f)$, $J^2(f,g)$ déjà connus, et en outre

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$R=0$ exprime que les racines de f, g, h sont trois couples en involution. On a d'ailleurs la relation (36)

$$2R^2 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) \end{vmatrix}$$

Pour le système formé par f, g, h et les variables (x), le système complet des invariants comprend ceux qui précèdent, les formes elles mêmes, et en outre les trois fonctions $J(g,h)$, $J(h,f)$, $J(f,g)$.

On a d'ailleurs la relation (36)

$$0 = \begin{vmatrix} J^2(f,f) & J^2(f,g) & J^2(f,h) & f \\ J^2(f,g) & J^2(g,g) & J^2(g,h) & g \\ J^2(f,h) & J^2(g,h) & J^2(h,h) & h \\ f & g & h & 0 \end{vmatrix}$$

et en outre les relations déjà connues.

Si l'on considère un nombre quelconque de formes quadratiques, leurs invariants seront tous des types que nous avons déjà reconnus, et seront liés par des relations analogues à celles qui précèdent.

Si l'on considère un système composé de formes quadratiques et de formes linéaires, on ne trouvera aucun résultat essentiellement nouveau ; on se trouve en effet ramené aux cas que nous avons étudiés dans ce chapitre, en remplaçant les formes linéaires par leurs carrés ou leurs produits deux à deux, quand il s'agit de les combiner avec les formes quadratiques.

Chapitre IV

Les formes cubique et biquadratique.

§ 1. – La forme cubique.

51. – Nous allons considérer le système formé par une form[e] cubique

$$f = a_{x^3} = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$
$$= (x\alpha)(x\beta)(x\gamma),$$

où l'écriture des coefficients a été simplifiée, et les variables (x).

Le premier invariant après f, est le hessien $J^2(f,f)$ de f; en le divisant par 2, nous aurons

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2)x_2^2 \;;$$

on a aussi

$$H = -\frac{1}{18}\Sigma(\beta\gamma)^2(x\alpha)^2;$$

à cause de l'identité $\Sigma(\beta\gamma)(x\alpha) = 0$, on voit que la condition $H = 0$ peut s'écrire encore

$$(\gamma\alpha)^2(x\beta)^2 + (\gamma\alpha)(\alpha\beta)(x\beta)(x\gamma) + (\alpha\beta)^2(x\gamma)^2 = 0,$$

d'où $(x\alpha\beta\gamma) = -\omega$, ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité; $H = 0$ définit donc les deux éléments qui forment avec $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ une proportion équianharmonique.

Un autre invariant est le hessien de H; nous poserons

$$D = 2J^2(H,H) = 4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2$$
$$= -\left[a_0^2a_3^2 - 6a_0a_1a_2a_3 + 4a_0a_2^3 + 4a_3a_1^3 - 3a_1^2a_2^2\right];$$

c'est le seul invariant proprement dit de f; il ne diffère donc du discriminant de f, qui est de même degré par rapport aux (a), que par un facteur numérique. En fait, on trouve

$$D = \frac{1}{27}(\beta\gamma)^2(\gamma\alpha)^2(\alpha\beta)^2.$$

Enfin, le système complet des invariants de f et de (x) comprend encore la forme cubique

$$J = 2J(f,H) = (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x_1^3 + 3(a_0a_1a_3 + a_1^2a_2 - 2a_0a_2^2)x_1^2x_2$$
$$+ 3(-a_0a_2a_3 - a_1a_2^2 + 2a_1^2a_3)x_1x_2^2 + (-a_0a_3^2 + 3a_1a_2a_3 - 2a_2^3)x_2^3;$$

J est un invariant d'ordre 3, tandis que H et D sont respectivement des ordres 2 et 6.

On a l'identité $\qquad J^2(f,H) = 0$

facile à vérifier, et par suite (36) la relation

$$2J^2 = \begin{vmatrix} 2H & 0 & f \\ 0 & 2D & 2H \\ f & 2H & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$-J^2 = Df^2 + 4H^3:$$

telle est la relation fondamentale qui lie entre eux les invariants f, H, D, J.

On trouvera sans peine encore les formules

$$J^2(J,J) = DH, \quad J(f,J) = -2H^2, \quad J^2(f,J) = 0, \quad J^3(f,J) = 2D,$$
$$J(H,J) = 2Df, \qquad J^2(H,J) = 0.$$

En fonction des racines, on obtient sans difficulté, en se

servant de la forme canonique indiquée plus bas :

$$J = -\frac{1}{27}\,\Pi\left((\alpha\beta)(x\gamma) + (\alpha\gamma)(x\beta)\right),$$

ce qui montre que J représente les trois éléments conjugués harmoniques de chacune des racines de f par rapport aux deux autres.

52. – Nous allons retrouver tous les résultats précédents par le calcul que voici. Cherchons les valeurs des rapports anharmoniques déterminés par les éléments $(x), (\alpha), (\beta), (\gamma)$.

Soit $\rho_1 = (x\beta)(\alpha\gamma)$, $\rho_2 = (x\gamma)(\alpha\beta)$,

de sorte que l'un des rapports cherchés est $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

En se servant de l'identité

$$(x\alpha)(\beta\gamma) + (x\beta)(\gamma\alpha) + (x\alpha)(\gamma\beta) = 0,$$

on trouve sans peine

$$\rho_1 - \rho_2 = (x\alpha)(\beta\gamma),$$

$$\rho_1 + \rho_2 = (x\beta)(\alpha\gamma) + (x\gamma)(\alpha\beta),$$

$$\rho_1 - 2\rho_2 = (x\alpha)(\beta\gamma) + (x\gamma)(\beta\alpha),$$

$$\rho_2 - 2\rho_1 = (x\beta)(\gamma\alpha) + (x\alpha)(\gamma\beta),$$

$$\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = \frac{1}{2}\,\Sigma\,(x\alpha)^2(\beta\gamma)^2;$$

donc, par un calcul de fonctions symétriques très simple, on a

$$\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2 = f^2\,(\beta\gamma)^2(\gamma\alpha)^2(\alpha\beta)^2 = 27 f^2 D,$$

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_1-2\rho_2)(\rho_2-2\rho_1) = -27J,$$

$$\rho_1^2 - \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = -9H,$$

et par suite la double équation :

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{J^2} = \frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)}{-4H^3} = \frac{27\,\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2}{f^2 D}\;;$$

d'après l'identité du N° 39, on obtient la suivante.

$$J^2 + 4H^3 + f^2 D = 0,$$

et l'on retrouve la signification des conditions $J=0$ et $H=0$. L'équation en $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ que nous venons de former a six racines, et de chacune d'elles, on peut tirer facilement les cinq autres comme nous l'avons vu au N° 39; elle dépend de l'invariant absolu $\frac{J^2}{H^3}$ par exemple comme unique paramètre.

53. — f a une racine triple quand H est nul identiquement; D et J sont aussi nuls. La forme canonique de f est

$$f = a_0 x_1^3 .$$

Si H n'est pas nul identiquement, mais si D est nul, f a une racine double, non triple; la forme canonique de f est alors

$$f = 3a_1 x_1^2 x_2 ,$$

en choisissant convenablement les éléments fondamentaux.

Ici $\qquad H = -a_1^2 x_1^2 \quad , J = 2a_1^3 x_1^3 ;$

il est facile d'obtenir dans ce cas les racines de f.

Dans le cas général D n'est pas nul, et f a 3 racines simples; les racines de H sont simples aussi; et on peut les faire correspondre aux éléments fondamentaux; ceci exige

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 0, \qquad a_1 a_3 - a_2^2 = 0 ;$$

considérons ces relations comme des équations linéaires en a_1 et a_2; leur déterminant est $a_1 a_2 - a_0 a_3$ et n'est pas nul puisque H n'est pas nul identiquement, on doit donc supposer

$$a_1 = a_2 = 0 .$$

f prend alors la forme canonique

$$f = a_0 x_1^3 + a_3 x_1^3,$$

et l'on a

$$H = a_0 a_3 x_1 x_2, \quad D = -a_0^2 a_3^2, \quad J = a_0^2 a_3 x_1^3 - a_0 a_3^2 x_2^3,$$

formes sur lesquelles tout ce qui a été dit précédemment devient intuitif.

Voici comment on peut opérer cette réduction à la forme canonique, et en même temps, dans tous les cas, décomposer f en facteurs linéaires.

En introduisant les indéterminées (y), on a :

$$H_{x^2} H_{y^2} = \left(H_{xy} + (xy)\sqrt{-\tfrac{D}{4}}\right)\left(H_{xy} - (xy)\sqrt{-\tfrac{D}{4}}\right);$$

soit donc

$$x_1' = H_{xy} + (xy)\sqrt{-\tfrac{D}{4}},$$
$$x_2' = H_{xy} - (xy)\sqrt{-\tfrac{D}{4}}.$$

Le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est $\frac{1}{H_{y^2}\sqrt{-D}}$; écrivons alors que f, H et J sont des invariants, et remplaçons les (x) par les (y) ; si f devient

$$f = a_0' x_1'^3 + a_3' x_2'^3,$$

on obtient immédiatement :

$$a_0' + a_3' = \frac{a_{y^3}}{H_{y^2}^3},$$

$$a_0' a_3' = \frac{-1}{D H_{y^2}^3},$$

$$a_0' a_3' (a_0' - a_3') = -\frac{J_{y^3}}{D H_{y^2}^6 \sqrt{-D}},$$

et par suite, sans ambiguïté :

$$\alpha'_0 = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\left(J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}\right),$$

$$\alpha'_3 = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\left(-J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}\right),$$

Décomposons maintenant f en facteurs linéaires ; on a

$$f = \frac{1}{2H^3_{y^2}\sqrt{-D}}\,\Pi\left(x'_1\sqrt[3]{J_{y^3} + a_{y^3}\sqrt{-D}} - x'_2\,\mathcal{E}\sqrt[3]{J_{y^3} - a_{y^3}\sqrt{-D}}\right);$$

les deux radicaux cubiques ayant des déterminations arbitrairement choisies, et $\mathcal{E}$ désignant successivement chacune des trois racines cubiques de l'unité.

Remplaçant les (x') par leurs valeurs, il vient

$$f = \frac{a_{y^3}}{H^3_{y^2}}\,\Pi\left(H_{xy} + (xy)\sqrt{-\frac{D}{4}}\;\frac{\sqrt[3]{J_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-D}} + \mathcal{E}\sqrt[3]{J_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-D}}}{\sqrt[3]{J_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-D}} - \mathcal{E}\sqrt[3]{J_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-D}}}\right);$$

l'identité $\dfrac{p+q\mathcal{E}}{p-q\mathcal{E}} = \dfrac{p^3+q^3+2pq(\mathcal{E}p+\mathcal{E}^2q)}{p^3-q^3}$

permet d'écrire le coefficient de (xy) sous la forme

$$\frac{J_{y^3}}{2a_{y^3}} + \frac{1}{2a_{y^3}}\sqrt[3]{J_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-D}}\;\sqrt[3]{J_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-D}}\left(\mathcal{E}\sqrt[3]{J_{y^3}+a_{y^3}\sqrt{-D}} + \mathcal{E}^2\sqrt[3]{J_{y^3}-a_{y^3}\sqrt{-D}}\right);$$

à cause de la relation $J^2 + Df^2 + 4H^3 = 0$,

on peut prendre les deux radicaux cubiques liés par la relation

$$\sqrt[3]{J_y^3 + a_{y^3}\sqrt{-D}}\;\sqrt[3]{J_y^3 - a_{y^3}\sqrt{-D}} = -\sqrt[3]{4}\,H_{y^2};$$

on trouve aussi sans peine l'identité

$$2H_{xy}\,a_{y^3} + J_{y^3}(xy) = 2a_{xy^2}\,H_{y^2},$$

et par suite on peut écrire finalement :

$$f = \frac{1}{a_{y^3}^2} \, \Pi \left(\alpha_{xy^2} + (xy) \left(\varepsilon \sqrt[3]{\frac{-J_{y^3} + \alpha_{y^3}\sqrt{-D}}{2}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{-J_{y^3} - \alpha_{y^3}\sqrt{-D}}{2}} \right) \right),$$

ε ayant été changé en ε^2, et les deux radicaux cubiques étant liés par la relation

$$\sqrt[3]{\frac{-J_{y^3} + \alpha_{y^3}\sqrt{-D}}{2}} \sqrt[3]{\frac{-J_{y^3} - \alpha_{y^3}\sqrt{-D}}{2}} = -H_{y^2}.$$

Cette décomposition, où ne figurent que des invariants, s'applique évidemment à tous les cas possibles.

En faisant $y_1 = 1, y_2 = 0$, on retrouve les formules bien connues de la résolution de l'équation du troisième degré.

La discussion de la réalité des racines lorsque les coefficients (α) sont supposés réels n'offre aucune difficulté.

54. – Envisageons les formes

$$g = \lambda_1 f + \lambda_2 J,$$

qui forment un faisceau du troisième degré ; les invariants H, D, J calculés pour g se trouvent sans peine sur la forme canonique ; on a

$$H_g = H(\lambda_1^2 + D\lambda_2^2), \quad D_g = D(\lambda_1^2 + D\lambda_2^2)^2,$$

$$J_g = (\lambda_1 J - Df\lambda_2)(\lambda_1^2 + D\lambda_2^2).$$

g est un cube parfait pour $\lambda_1^2 + D\lambda_2^2 = 0$ ainsi que cela résulte d'ailleurs de la relation entre f, H, D, J. A part ce cas, D_g n'est jamais nul si D n'est pas nul. En particulier, on a

$$H_J = DH, \quad D_J = D^3, \quad J_J = -D^2 f\,;$$

on voit que f et J sont en quelque sorte conjuguées.

§.2.– La forme biquadratique.

55.– Considérons une forme biquadratique que nous écrirons en simplifiant comme précédemment :

$$f = a_x^4 = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$
$$= (x\alpha)(x\beta)(x\gamma)(x\delta).$$

Les invariants suivants constituent avec f un système complet de l'ensemble de f et des (x).

1° le hessien de f. Nous ferons :

$$H = \frac{1}{2} J^2(f, f) = (a_0 a_2 - a_1^2) x_1^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2) x_1^3 x_2$$
$$+ (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x_1^2 x_2^2$$
$$+ 2(a_1 a_4 - a_2 a_3) x_1 x_2^3 + (a_2 a_4 - a_3^2) x_2^4 ;$$

H est d'ordre 2.

2° l'invariant proprement dit d'ordre 4 :

$$i = \frac{1}{2} J^4(f, f) = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 ;$$

3° le jacobien de f et de H, d'ordre 3 ; nous ferons :

$$J = 2J(f, H) = (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^6$$
$$+ (a_0^2 a_4 + 2 a_0 a_1 a_3 - 9 a_0 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2) x_1^5 x_2$$
$$+ (5 a_0 a_1 a_4 - 15 a_0 a_2 a_3 + 10 a_1^2 a_3) x_1^4 x_2^2$$
$$+ (-10 a_0 a_3^2 + 10 a_1^2 a_4) x_1^3 x_2^3 + \ldots\ldots,$$

où l'on achèvera par symétrie, en remarquant que J est un invariant gauche.

4° l'invariant proprement dit d'ordre 6 :

$$j = \frac{1}{3} J^4(f, H) = a_0 a_2 a_4 - a_2^3 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Ces invariants sont liés par une relation que nous donnerons plus bas.

56.– Cherchons avant d'aller plus loin une forme canonique pour f. On peut mettre f sous la forme

$$f = (x\alpha)^4 + (x\beta)^4 + 6\lambda \frac{(x\alpha)^2 (x\beta)^2}{(\alpha\beta)^2},$$

car le nombre des inconnues est égal au nombre des équations que l'on obtient en partant de cette identité.

Posons $\qquad g = (x\alpha)(x\beta) = b_{x^2}$.

On a

$$J^2(g,f) = J^2(g,(x\alpha)^4) + J^2(g,(x\beta)^4) + 6\frac{\lambda}{(\alpha\beta)^2} J^2(g,(x\alpha)^2(x\beta)^2):$$

or, on a d'après le n° 35

$$J^2(g,(x\alpha)^4) = J^2(g,(x\beta)^4) = 0, \;\&\; J^2(g,g^2) = -\frac{(\alpha\beta)^2}{3}g.$$

Par suite

$$J^2(g,f) = -2\lambda g;$$

d'ailleurs directement, on a:

$$J^2(g,f) = b_0(a_2x_1^2 + 2a_3x_1x_2 + a_4x_2^2) - 2b_1(a_1x_1^2 + 2a_2x_1x_2 + a_3x_2^2)$$
$$+ b_2(a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2),$$

et par suite, on a les équations:

$$\begin{cases} b_0(a_2 + 2\lambda) - 2b_1a_1 + b_2a_0 = 0, \\ b_0 a_3 - 2b_1(a_2 - \lambda) + b_2a_1 = 0, \\ b_0 a_4 - 2b_1a_3 + b_2(a_2 + 2\lambda) = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent les (b) en choisissant pour λ une racine de l'équation:

$$\begin{vmatrix} a_2+2\lambda & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2-\lambda & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_2+2\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrit encore : $\lambda^3 - \lambda \frac{i}{4} + \frac{j}{4} = 0.$

A chaque racine de cette équation dite canonisante et dont les coefficients sont des invariants, correspond en général une réduction et une seule de f à la forme canonique

$$f = a'_0 x'^4_1 + 6 a'_2 x'^2_1 x'^2_2 + a'_4 x'^4_2 .$$

57. – Sur la forme canonique

$$f = a_0 x_1^4 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + a_4 x_2^4 ,$$

on a $\quad i = a_0 a_4 + 3a_2^2 , \quad j = a_0 a_2 a_4 - a_2^3 ,$

$$H = a_0 a_2 x_1^4 + (a_0 a_4 - 3a_2^2) x_1^2 x_2^2 + a_2 a_4 x_2^4 ,$$

$$J = (a_0^2 a_4 - 9a_0 a_2^2) x_1^5 x_2 - (a_0 a_4^2 - 9 a_4 a_2^2) x_1 x_2^5 = (a_0 a_4 - 9a_2^2) x_1 x_2 (a_0 x_1^4 - a_4 x_2^4).$$

On vérifie facilement entre autres identités intéressantes, les suivantes

$$J^2 (f, H) = \frac{1}{6} i f ,$$
$$J^2 (H, H) = \frac{1}{2} j f - \frac{1}{6} i H ;$$

par suite d'après une identité donnée au N° 36, on a la relation :

$$\frac{J^2}{2} = \begin{vmatrix} 2H & \frac{1}{6} i f & f \\ \frac{1}{6} i f & \frac{1}{2} j f - \frac{1}{6} i H & H \\ f & H & 0 \end{vmatrix} ,$$

ou :

$$J^2 = -(4H^3 - i f^2 H + j f^3) ;$$

c'est la relation cherchée entre les invariants de f.

On voit que si $\lambda', \lambda'', \lambda'''$, sont les racines de la canonisante

on a :

$$J^2 = -4(H-\lambda' f)(H-\lambda'' f)(H-\lambda''' f).$$

Cette forme amènerait à former et discuter les invariants des formes du faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 H$; mais ceci nous entraînerait trop loin.

D'ailleurs, pour la forme canonique, on peut prendre

$$\lambda' = a_2, \qquad \left.\begin{matrix}\lambda'' \\ \lambda'''\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(-a_2 \pm \sqrt{a_0 a_4}\right).$$

En fonction des racines, on trouve d'abord

$$H = -\frac{1}{48}\sum (x\alpha)^2 (x\beta)^2 (\gamma\delta)^2,$$

$$J = -\frac{1}{32}\sum (\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha\delta)(x\beta)^2(x\gamma)^2(x\delta)^2,$$

comme le montre un calcul simple de fonctions symétriques, puisqu'il suffit de comparer les premiers termes.

Posons maintenant

$$\rho' = (\alpha\gamma)(\beta\delta) + (\alpha\delta)(\beta\gamma),$$

$$\rho'' = (\alpha\delta)(\gamma\beta) + (\alpha\beta)(\gamma\delta),$$

$$\rho''' = (\alpha\beta)(\delta\gamma) + (\alpha\gamma)(\delta\beta);$$

l'équation qui admet ces trois quantités pour racines est

$$\rho^3 - 36\, i\rho + 432\, j = 0,$$

qu'on déduit de la canonisante en faisant $\rho = 12\lambda$.

On a par suite

$$i = -\frac{1}{36}\sum \rho''\rho''', \quad j = -\frac{1}{432}\rho'\rho''\rho'''.$$

58. — Cherchons l'équation qui donne les rapports anharmoniques tels que $(\alpha\beta\gamma\delta)$ des quatre racines.

Si l'on fait $\rho_1 = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$, $\rho_2 = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$, on a

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\rho_1}{\rho_2};$$

d'ailleurs, en se servant de l'identité

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta)+(\alpha\gamma)(\delta\beta)+(\alpha\delta)(\beta\gamma)=0,$$

on a

$$\rho_1-\rho_2=(\alpha\beta)(\gamma\delta),$$

$$\rho_1+\rho_2=\rho',\ \rho_1-2\rho_2=\rho'',\ \rho_2-2\rho_1=\rho''',$$

$$\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2=-\frac{1}{3}\Big((\rho_1+\rho_2)(\rho_1-2\rho_2)+(\rho_1+\rho_2)(\rho_2-2\rho_1)+(\rho_1-2\rho_2)(\rho_2-2\rho_1)\Big)$$

$$=-\frac{1}{3}\Sigma\rho''\rho'''=12i\ ;$$

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_1-2\rho_2)(\rho_2-2\rho_1)=\rho'\rho''\rho'''=-432j.$$

On a par suite pour l'équation cherchée

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{27j^2}=\frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3}{i^3}\ ;$$

semblable à celle du No. 52, le seul paramètre étant l'invariant absolu géométrique $\frac{i^3}{j^2}$.

De plus, d'après l'identité du No. 39, on a encore

$$\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2=256(i^3-27j^2),$$

et par suite

$$\Pi(\alpha\beta)^2=256(i^3-27j^2),$$

de sorte que le discriminant de f est à un facteur numérique près l'invariant i^3-27j^2.

Sur la forme canonique, on a

$$i^3-27j^2=a_0a_4(a_0a_4-9a_2^2)^2\ ;$$

de plus, on voit que i^3-27j^2 est aussi à un facteur numérique près le discriminant de la canonisante.

Il résulte encore de tout ceci que $i=0$ exprime la condition pour que les quatre racines de f forment une proportion équianharmonique ; que $j=0$ exprime la condition pour que les quatre

racines de f forment une proportion harmonique.

Enfin, remarquons que, d'après sa forme canonique, $J=0$ représente les trois couples d'éléments doubles des trois involutions déterminés par les racines de f, accouplées deux à deux de toutes les façons possibles ; ces trois couples d'éléments sont d'ailleurs représentés deux fois par les trois facteurs $H-\lambda' f$, $H-\lambda'' f$, $H-\lambda''' f$ de J^2 ; en effet pour $\lambda'=a_2$, on a $H-\lambda' f=(a_0 a_4-9a_2^2)\,x_1^2 x_2^2$, et le couple $x_1 x_2=0$ représente deux éléments conjugués harmoniques par rapport aux couples (α) et (β), (γ) et (δ), si $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$, $\gamma_1\delta_2+\gamma_2\delta_1=0$, ce qui est possible.

De plus, chacun des trois couples ainsi déterminés a ses éléments conjugués harmoniques par rapport aux éléments des deux autres.

59. – La forme canonique que nous avons employée est réalisable de trois façons différentes quand i^3-27j^2 n'est pas nul, puisqu'alors la canonisante a trois racines distinctes.

Voici les divers cas particuliers possibles :

Si f a une racine quadruple, H est nul identiquement et réciproquement ; tous les autres invariants sont aussi nuls ; la forme canonique de f est $a_0 x_1^4$, unique.

Si f a une racine triple, on peut ramener f à la forme simple $f=4a_1 x_1^3 x_2$;

alors $i=0$, $j=0$, $H=-a_1^2 x_1^4$, $J=2a_1^3 x_1^6$.

Réciproquement, ce cas est caractérisé par les conditions $i=0$, $j=0$.

Si f a deux racines doubles distinctes, c'est-à-dire est un carré parfait, la forme canonique la plus simple est

$$f = 6a_2 x_1^2 x_2^2 \;;$$

alors $i = 3a_2^2$, $j = -a_2^3$, $H = 3a_2^2 x_1^2 x_2^2$, $J = 0$,

et par suite

$$i^3 - 27j^2 = 0, \quad 3jf - 2iH = 0, \quad i^2 f - 18jH = 0 \;;$$

réciproquement i et j n'étant pas nuls, ce cas est caractérisé par l'évanouissement identique de J, ou de $3jf - 2iH$, ou de $i^2 f - 18jH$; la condition la plus simple à employer est $3jf - 2iH = 0$.

Si f a une racine double unique, on a simplement $i^3 - 27j^2 = 0$. Dans ce cas, la réduction à la forme canonique ordinaire peut se faire d'une seule façon : dans le cas précédent, elle peut se faire d'une infinité de façons.

60. — Pour exécuter dans le cas général la réduction à la forme canonique

$$f' = a'_0 x_1'^4 + 6a'_2 x_1'^2 x_2'^2 + a'_4 x_2'^4,$$

on remarquera que $H - \lambda' f$ par exemple, est à un facteur près le carré de $x'_1 x'_2$; on a donc

$$H - \lambda' f = g' = h'^2 \;;$$

les quantités x'_1 et x'_2 sont donc les facteurs linéaires de h' ; on est amené alors à introduire les indéterminées (y) et à considérer la polaire h'_{xy} ; en se servant par exemple de la forme canonique, on trouve

$$h'_{xy} = \frac{g'_{xy^3}}{h'_{y^2}}.$$

si donc D' est l'invariant de h', on posera par exemple :

$$\begin{cases} x'_1 = g'_{xy^3} + (xy)\sqrt{-D'g'_{y^4}}\,, \\ x'_2 = g'_{xy^3} - (xy)\sqrt{-D'g'_{y^4}}\,; \end{cases}$$

en calculant sur la forme canonique, on a :

$$D' = \frac{1}{4}(9a'^2_2 - a'_0 a'_4) = (\lambda' - \lambda'')(\lambda' - \lambda''')\,;$$

donc, généralement, puisqu'on n'a plus que des invariants dans les formules, on aura

$$\begin{cases} x'_1 = g'_{xy^3} + (xy)\sqrt{-(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')g'_{y^4}}\,, \\ x'_2 = g'_{xy^3} - (xy)\sqrt{-(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')g'_{y^4}}\,; \end{cases}$$

et le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x) aux (x') est

$$\frac{1}{2g'_{y^4}\sqrt{-(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')g'_{y^4}}}\,.$$

λ' peut être considéré comme un invariant d'ordre 2 qui prend la valeur a'_2 pour la forme canonique ; donc d'abord

$$a'_2 = \frac{-\lambda'}{4g'^3_{y^4}(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')}\,;$$

ensuite en se servant des autres invariants comme nous avons déjà fait souvent, on a sans ambiguïté :

$$\left.\begin{matrix} a'_0 \\ a'_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2g'^4_{y^4}}\left\{ a_{y^4} + \frac{3\lambda' g'_{y^4}}{2(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')} \pm \frac{J_{y^6}}{2\sqrt{-(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''')g'_{y^4}}} \right\}.$$

Si l'on ne veut employer que λ', on remarquera que

$$(\lambda'-\lambda'')(\lambda'-\lambda''') = 3\lambda'^2 - \frac{i}{4}$$

par exemple.

On a de même deux autres réductions correspondant à λ'' et λ'''.

61. — La décomposition de f en facteurs linéaires peut s'obtenir directement de la façon suivante. On a

$$H - \lambda' f = g' = h'^2, \quad H - \lambda'' f = g'' = h''^2, \quad H - \lambda''' f = g''' = h'''^2,$$

d'où
$$(\lambda''-\lambda''')\,f = -(h''+h''')(h''-h'''),$$
$$(\lambda'''-\lambda')\,f = -(h'''+h')(h'''-h'),$$
$$(\lambda'-\lambda'')\,f = -(h'+h'')(h'-h''),$$
et l'on a ainsi d'abord de trois façons différentes, la décomposition de f en facteurs quadratiques.

$h'-h''$ et $h'-h'''$ par exemple ont un facteur linéaire commun, sans quoi $h'+h''$ et $h'-h'''$ auraient les mêmes facteurs, ainsi que $h'-h''$ et $h'+h'''$, hypothèses absurdes; le facteur linéaire commun à $h'-h''$ et $h'-h'''$ est la racine carrée de leur jacobien, et est un facteur linéaire de f. On a évidemment
$$J(h'-h'', h'-h''') = J(h'', h''') + J(h''', h') + J(h', h'');$$
sur la forme canonique, on constate sans peine que:
$$J(h'', h''') = h'(\lambda''-\lambda''')\sqrt{-1}\,, \ldots\ldots$$
relations qui étaient faciles à prévoir d'après ce que nous avons dit à la fin du N°. 58. Les carrés des facteurs linéaires de f sont donc
$$\pm(\lambda''-\lambda''')h' \pm (\lambda'''-\lambda')h'' \pm (\lambda'-\lambda'')h''',$$
et ces facteurs eux mêmes peuvent s'écrire d'après ce qui a été dit plus haut sous la forme
$$\frac{\lambda''-\lambda'''}{\sqrt{g'_{y^4}}}\,g'_{xy^3} \pm \frac{\lambda'''-\lambda'}{\sqrt{g''_{y^4}}}\,g''_{xy^3} + \frac{\lambda'-\lambda''}{\sqrt{g'''_{y^4}}}\,g'''_{xy^3},$$
les radicaux ayant des signes arbitraires; si l'on fait
$$A' = \frac{\lambda''-\lambda'''}{\sqrt{g'_{y^4}}}\,g'_{xy^3}\,, \ldots\ldots\ldots,$$
on a exactement
$$f = -\frac{16}{a_{y^4}(i^3-27j^2)}(A'+A''+A''')(-A'+A''+A''')(A'-A''+A''')(A'+A''-A''').$$

Telle est la formule de résolution de l'équation du 4e. degré; elle devient illusoire quand f a des racines multiples.

Pour le calcul numérique, on pourra faire $y_1 = 1$, $y_2 = 0$.

Chapitre V.

Les Invariants des formes ternaires.

§.1. _ Les formes ternaires. Définitions et généralités.

62.. Envisageons un ensemble doublement infini d'éléments géométriques quelconques, dont on dira par suite qu'ils remplissent un espace à deux dimensions : ce sont par exemple les points d'un plan, ou les droites d'un plan ; ou les droites qui passent par un point de l'espace, ou encore les plans qui passent par un point de l'espace, et d'habitude on se borne à ces cas. On peut supposer qu'à chaque élément de l'ensemble considéré, on puisse faire correspondre un groupe de trois valeurs variables x_1, x_2, x_3, dites variables ternaires, de telle façon que les valeurs des rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$, soient parfaitement déterminées, et que réciproquement, à chaque système de valeurs de ces rapports corresponde un élément et un seul. On voit que les coordonnées x_1, x_2, x_3, de l'élément (x) sont ainsi définies à un facteur près ; on peut supposer qu'elles ne s'annulent pas en même temps, et qu'aucune d'elles ne devient jamais infinie.

La condition d'identité de deux éléments (y) et (z) est que les déterminants $(yz)_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2$, $(yz)_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3$, $(yz)_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1$, tirés de la matrice (yz) :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

soient tous nuls. Nous continuerons d'ailleurs à employer les notations abrégées ainsi définies.

Les éléments fondamentaux ou de référence sont ceux qui ont deux coordonnées nulles; soit $O_1\,(1,0,0)$, $O_2\,(0,1,0)$, $O_3\,(0,0,1)$.

63.- Considérons une forme linéaire par rapport aux (x), soit pour abréger

$$(\xi/x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3\,;$$

égalée à zéro, elle définit une série simplement infinie d'éléments (x), dont les coordonnées vérifient l'équation $(\xi/x)=0$. Une telle série est définie par les rapports des quantités (ξ), qui se comportent à son égard absolument comme les coordonnées (x) à l'égard de l'élément (x). Ces séries sont des éléments géométriques nouveaux résultant des premiers, et dont les (ξ) sont les coordonnées; si les (x) sont les points ou les droites d'un plan, les (ξ) seront les droites ou les points de ce plan.

Nous dirons de ces éléments, afin de ne rien particulariser, qu'ils sont de seconde espèce, par opposition aux éléments (x) qui seront dits de première espèce. Ces deux sortes d'éléments remplissent le même espace.

La symétrie de l'équation $(\xi/x)=0$ montre que les (x) jouent le même rôle par rapport aux (ξ) que les (ξ) par rapport aux (x). $(\xi/x)=0$ est l'équation de l'élément (ξ) donné, en ce sens qu'elle définit

les (x) variables dont l'ensemble constitue ce (ξ) ; c'est aussi bien l'équation de l'élément (x) donné, en ce sens qu'elle définit les (ξ) variables dont l'ensemble constitue cet (x). Nous dirons des deux éléments (x) et (ξ) vérifiant la relation $(\xi/x)=0$, qu'ils se contiennent réciproquement.

Nous affecterons les lettres latines aux éléments de première espèce; les lettres grecques aux éléments de seconde espèce.

64. — Un élément (ξ) est défini par deux éléments (y) et (z) distincts. Si (x) est un élément quelconque de (ξ) on a

$$(xyz) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation de (ξ) et l'on a par suite

$$\frac{\xi_1}{(yz)_1} = \frac{\xi_2}{(yz)_2} = \frac{\xi_3}{(yz)_3}.$$

On peut encore écrire à cause de $(xyz)=0$:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1, \\ x_2 &= \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2, \\ x_3 &= \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3; \end{aligned} \right.$$

et réciproquement, un tel élément (x) appartient à (ξ) que nous désignerons aussi par (yz). On voit que l'on peut considérer (ξ) comme un espace à une dimension rempli par des éléments géométriques (x) dont les coordonnées sont les (λ) ; les éléments fondamentaux y sont (y) et (z).

Ce que nous venons de dire peut être répété sans peine, en échangeant les espèces des éléments : il est inutile d'y insister.

Les éléments fondamentaux de seconde espèce sont ceux pour lesquels deux coordonnées sont nulles, soit $\Omega_1(1,0,0)$, $\Omega_2(0,1,0)$, $\Omega_3(0,0,1)$. D'après ce qui précède, Ω_1 contient O_2 et O_3 ; de même O_1 contient Ω_2 et Ω_3 ; on peut par suite, et nous ferons de même dans les cas semblables, représenter encore Ω_1 par $O_2\,O_3$.

Remarque.- Nous aurions pu déjà dans la théorie des formes binaires, considérer des variables de seconde espèce savoir : les coefficients d'une forme linéaire. Mais c'était inutile, car les éléments (ξ) ainsi définis ne diffèrent pas des éléments (x).

65.- Une <u>forme ternaire</u> est un polynôme entier et homogène séparément par rapport à diverses séries de variables de première et de seconde espèce. Si f est une telle forme des degrés $p, q, \ldots \pi, \rho, \ldots$ par rapport aux diverses séries de variables $(x), (y), \ldots (\xi), (\eta) \ldots$ on écrira :

$$f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}$$

$$= \sum \frac{P_p \ldots P_\pi \ldots}{P_{p_1} P_{p_2} P_{p_3} \ldots P_{\pi_1} P_{\pi_2} P_{\pi_3} \ldots} a_{p_1 p_2 p_3; \ldots \pi_1 \pi_2 \pi_3; \ldots} x_1^{p_1} x_2^{p_2} x_3^{p_3} \ldots \xi_1^{\pi_1} \xi_2^{\pi_2} \xi_3^{\pi_3} \ldots$$

où p_1, p_2, p_3 par exemple, sont trois entiers non négatifs dont la somme est p.

Les (a) sont les coefficients de la forme. L'équation $f = 0$ établit une relation entre les éléments dont elle contient les coordonnées. Si f ne contient qu'une série de variables, $f = 0$ définit un ensemble simplement infini d'éléments (x) ou (ξ) dont on dit qu'ils forment une <u>série</u> de première ou de seconde espèce suivant le cas. Si f est de degré p par rapport aux variables, la série dont l'équation

est $f=0$ est de degré p ; donc elle contient $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients, et est déterminée par suite au point de vue géométrique par la condition de contenir $\frac{p(p+3)}{2}$ éléments donnés d'une façon quelconque. En général, deux formes semblables pour lesquelles les rapports des coefficients entre eux sont les mêmes, sont équivalentes au point de vue géométrique.

Une série linéaire de première ou de seconde espèce est un élément de seconde ou de première espèce.

Un système ternaire est constitué par des formes et des variables de première ou de seconde espèce. Les éléments qui constituent le système sont les variables isolées et les coefficients des formes.

Le poids d'un coefficient tel que $a_{p_1, p_2, p_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots}$ par rapport à l'indice i est $p_i + \dots - \pi_i - \dots$; le poids de x_j (ou ξ_j) par rapport à l'indice i est 0 ou -1 (ou $+1$) suivant que l'on a $i \neq j$ ou $i = j$.

Ces définitions posées, les considérations relatives au poids s'achèveront comme au N° 2.

La forme f est isobarique et de poids zéro.

66.– Une forme f, ne dépendant que des (x), peut dans certains cas être le produit de p facteurs linéaires, de sorte que :

$$f = a_{x^p} = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) \dots (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3);$$

on a des relations telles que

$$\Sigma \alpha_1 \beta_1 \dots \varepsilon_2 \zeta_2 \dots \theta_3 \dots \lambda_3 = \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2} P_{p_3}} a_{p_1, p_2, p_3},$$

$\alpha_1, \beta_1, \dots$ étant en nombre p_1, $\varepsilon_2 \zeta_2 \dots$ en nombre p_2, $\theta_3, \dots \lambda_3$ en nombre p_3.

Les premiers membres sont les fonctions symétriques fondamentales

des coordonnées des p éléments de seconde espèce $(\alpha)(\beta)\ldots(\lambda)$. Comme au N° 3, toute fonction symétrique de ces coordonnées, entière et homogène du même degré μ par rapport aux divers systèmes $(\alpha), (\beta), \ldots$ est une fonction entière des fonctions symétriques fondamentales et par suite des coefficients (a); son degré par rapport aux (a) est μ; elle est isobarique par rapport à chacun des indices 1, 2, 3, et ses divers poids sont faciles à calculer. Pour le démontrer et obtenir en même temps l'expression d'une telle fonction symétrique à l'aide des (a), considérons d'abord une fonction symétrique de la forme:

$$\Sigma\, \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\mu_3}\, \beta_1^{\mu}\, \gamma_1^{\mu} \ldots \lambda_1^{\mu}$$

où

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu.$$

Dans f, faisons $x_3 = t x_2$; elle devient une forme binaire dont les coefficients s'expriment à l'aide des (a) et de t, et qui est égale au produit

$$(\alpha_1 x_1 + (\alpha_2 + t\alpha_3) x_2)(\beta_1 x_1 + (\beta_2 + t\beta_3) x_2) \ldots$$

Pour cette forme calculons la fonction symétrique

$$\Sigma\, \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_2 + t\alpha_3)^{\mu - \mu_1}\, \beta_1^{\mu}\, \gamma_1^{\mu} \ldots \lambda_1^{\mu}:$$

le coefficient de t^{μ_3} dans cette expression sera évidemment la valeur de la fonction considérée tout d'abord.

Considérons maintenant la fonction symétrique

$$S = \Sigma\, \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \alpha_3^{\mu_3}\, \beta_1^{\mu'_1} \beta_2^{\mu'_2} \beta_3^{\mu'_3}\, \gamma_1^{\mu} \ldots \lambda^{\mu},$$

où

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 = \mu.$$

On a:

$$S\times(\alpha_1\beta_1\ldots\lambda_1)^\mu = \sum \alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\alpha_3^{\mu_3}\beta_1^{\mu}\ldots\lambda_1^{\mu}$$
$$\times\sum \alpha_1^{\mu'_1}\alpha_2^{\mu'_2}\alpha_3^{\mu'_3}\beta_1^{\mu}\ldots\lambda_1^{\mu}$$
$$-\sum \alpha_1^{\mu_1+\mu'_1}\alpha_2^{\mu_2+\mu'_2}\alpha_3^{\mu_3+\mu'_3}\beta_1^{2\mu}\ldots\lambda_1^{2\mu},$$

le second membre devant être divisé par 2, quand on a $\mu_1=\mu'_1$ et $\mu_2=\mu'_2$. Les fonctions symétriques du second membre sont connues, d'après ce qui précède, et par suite aussi S; d'ailleurs le second membre sera divisible par $(\alpha_1\beta_1\ldots\lambda_1)^\mu$ ou $a^\mu_{p,0,0}$, puisque S n'est jamais infinie. On peut continuer évidemment de la même façon et démontrer ainsi le théorème général. Remarquons que dans le cas des formes binaires, on aurait pu employer un procédé analogue, en calculant d'abord les fonctions qui correspondent aux sommes des puissances semblables des racines; mais le calcul explicite d'une fonction symétrique quelconque aurait été moins simple.

67. – Si f dépend des variables (x), la polaire d'ordre h de f par rapport aux (x) remplacés par les (y) est.

$$D^h_{xy}f = \frac{P_{p-h}}{P_p}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^h,$$

la puissance qui figure au second membre étant symbolique.

On pourra de même prendre des polaires par rapport à des variables de seconde espèce.

On fera les mêmes remarques qu'au n° 4.

C'est ainsi que, aucune ambiguïté n'étant à craindre, on écrira par exemple:

$$D^h_{xy}\left(D^k_{\xi\eta}f\right) = a_{x^{p-h}y^h\xi^{\pi-k}\eta^k}, \quad \text{si } f = a_{x^p\xi^\pi}.$$

Soit $f = a_{x^p}$; sa polaire d'ordre h, $a_{x^{p-h}y^h}$, définit, (y) étant donné, une série de degré $p-h$ qui est la h^e polaire de (y) par rapport à f ; si (x) appartient à cette série, (y) appartient à $(p-h)^e$ polaire de (x) par rapport à f. La $(h+k)^e$ polaire de (y) par rapport à f coïncide avec sa $k^{ème}$ polaire par rapport à la $h^{ème}$ polaire de (y) à cause de

$$D^k_{xy}\,(D^h_{xy} f) = D^{h+k}_{xy} f\,;$$

la même chose a lieu dans le domaine binaire.

La $(p-1)^e$ polaire de (y) par rapport à f, est une série linéaire.

---

§ 2. – Les substitutions linéaires. Les Invariants.

---

68. – Transformons un système ternaire quelconque S comme nous avons transformé un système binaire au N° 5, par une substitution linéaire σ faite sur les (x), (y), .. telle que

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11} x'_1 + \lambda_{12} x'_2 + \lambda_{13} x'_3\,, \\ x_2 = \lambda_{21} x'_1 + \lambda_{22} x'_2 + \lambda_{23} x'_3\,, \\ x_3 = \lambda_{31} x'_1 + \lambda_{32} x'_2 + \lambda_{33} x'_3\,. \end{cases}$$

dont le déterminant δ n'est pas nul.

Si μ_{ij} est le coefficient de λ_{ij} dans δ, on peut écrire inversement

$$\begin{cases} \delta x'_1 = \mu_{11}\, x_1 + \mu_{21}\, x_2 + \mu_{31}\, x_3\,, \\ \delta x'_2 = \mu_{12}\, x_1 + \mu_{22}\, x_2 + \mu_{32}\, x_3\,, \\ \delta x'_3 = \mu_{13}\, x_1 + \mu_{23}\, x_2 + \mu_{33}\, x_3\,; \end{cases}$$

le déterminant des (μ) est d'ailleurs δ^2.

Si une forme linéaire $(\xi|x)$ devient $(\xi'|x')$, on aura

$$\begin{cases} \xi'_1 = \lambda_{11}\xi_1 + \lambda_{21}\xi_2 + \lambda_{31}\xi_3, \\ \xi'_2 = \lambda_{12}\xi_1 + \lambda_{22}\xi_2 + \lambda_{32}\xi_3, \\ \xi'_3 = \lambda_{13}\xi_1 + \lambda_{23}\xi_2 + \lambda_{33}\xi_3 \end{cases}$$

et inversement

$$\begin{cases} \delta\xi_1 = \mu_{11}\xi'_1 + \mu_{12}\xi'_2 + \mu_{13}\xi'_3, \\ \delta\xi_2 = \mu_{21}\xi'_1 + \mu_{22}\xi'_2 + \mu_{23}\xi'_3, \\ \delta\xi_3 = \mu_{31}\xi'_1 + \mu_{32}\xi'_2 + \mu_{33}\xi'_3 ; \end{cases}$$

les variables de seconde espèce sont ainsi transformées par une substitution analogue à σ et qui est dite transposée de σ.

Si la forme $f = a_{x^p y^q \dots \xi^\pi \eta^\rho \dots}$ du système S se transforme en $f = a'_{x'^p y'^q \dots \xi'^\pi \eta^\rho \dots}$, on détermine les nouveaux coefficients (a') de la façon suivante : on considère la polaire multiple

$$a_{x^{p_1}\bar{x}^{p_2}\bar{\bar{x}}^{p_3} y^{q_1}\bar{y}^{q_2}\bar{\bar{y}}^{q_3} \dots \xi^{\pi_1}\bar{\xi}^{\pi_2}\bar{\bar{\xi}}^{\pi_3} \eta^{\rho_1}\bar{\eta}^{\rho_2}\bar{\bar{\eta}}^{\rho_3} \dots}$$

où $p_1 + p_2 + p_3 = p, \dots\dots$; le coefficient $a'_{p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots\dots}$ est égal à la valeur de cette polaire lorsqu'on y fait

$$\begin{aligned} x_i &= y_i = \dots = \lambda_{i1}, & \xi_i &= \eta_i = \dots = \frac{\mu_{i1}}{\delta}, \\ \bar{x}_i &= \bar{y}_i = \dots = \lambda_{i2}, & \bar{\xi}_i &= \bar{\eta}_i = \dots = \frac{\mu_{i2}}{\delta}, \\ \bar{\bar{x}}_i &= \bar{\bar{y}}_i = \dots = \lambda_{i3}; & \bar{\bar{\xi}}_i &= \bar{\bar{\eta}}_i = \dots = \frac{\mu_{i3}}{\delta}. \end{aligned}$$

Si le système S est constitué par n système de variables, et par des formes dont les coefficients sont en nombre total N, on a $P = 3n + N$ relations distinctes entre les P éléments du système S et les P éléments du système transformé S' ; ces P relations contiennent les coefficients (λ), et appellent les mêmes remarques qu'au N° 5.

69. Les substitutions linéaires dans le domaine ternaire s'interprètent absolument comme dans le domaine binaire (21).

Elles définissent soit des changements de coordonnées, soit des correspondances homographiques entre les éléments de deux espaces qui coïncident ou non.

Au point de vue géométrique, la substitution σ ne dépend que de 8 paramètres, de sorte qu'une homographie par exemple est déterminée par 4 couples d'éléments correspondants, puisque la connaissance d'un tel couple fournit deux équations.

70. — Comme au N°. 6, on voit sans peine que les substitutions σ définissent pour les P éléments du système S un groupe à neuf paramètre fini et continu, de transformations. Les remarques de ce même numéro subsistent et cette propriété s'interprète géométriquement comme au N°. 23.

Comme conséquence, on voit comme au N°. 7, qu'il existe pour le système S et les transformations σ, des invariants absolus que l'on peut choisir indépendants en nombre P-p, p étant un nombre en général égal à 9, mais qui peut être inférieur à 9, et qui est déterminé par la considération des déterminants que l'on peut tirer d'une matrice analogue à la matrice M du N°. 7.

Ces invariants absolus peuvent être choisis rationnels par rapport aux P éléments du système S, ce que nous ferons toujours.

Les invariants absolus géométriques se définissent et s'interprètent comme au N°. 24

Le groupe des transformations contient 9 transformations

infinitésimales, des deux types

$$\sigma_{11})\begin{cases} x_1 = e^{\omega_{11}} x'_1, \\ x_2 = x'_2, \\ x_3 = x'_3, \end{cases} \qquad \sigma_{23})\begin{cases} x_1 = x'_1, \\ x_2 = x'_2 + \omega_{23} x'_3, \\ x_3 = x'_3, \end{cases}$$

ω_{ij} étant infiniment petit.

Considérant les ω_{ij} comme quelconques, on voit que les substitutions σ_{ij} forment un groupe et qu'une substitution σ quelconque résulte d'un certain nombre de substitutions σ_{ij}.

Par suite les invariants absolus sont les solutions du système de 9 équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes

$$\Delta_{ij} F = 0,$$

équations qui se réduisent à p distinctes formant un système complet et que l'on trouve comme au N° 9. On a:

$$\Delta_{11} F = -x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \dots + \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \dots + (p_1 + q_1 + \dots - \pi_1 - \rho_1 - \dots)\, a_{p_1, p_2, p_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots} \frac{\partial F}{\partial a_{p_1, p_2, p_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots}} + \dots$$

$$\Delta_{23} F = -x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \dots + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} + \dots + \frac{\partial F}{\partial a_{p_1, p_2, p_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots}} \times$$
$$\times \Big[p_3\, a_{p_1, p_2+1, p_3-1; q_1, q_2, q_3; \dots \pi_1, \pi_2, \pi_3; \dots} + \dots - \pi_2\, a_{p_1, p_2, p_3; \dots \pi_1, \pi_2 - 1, \pi_3 + 1; \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots} + \dots \Big]$$
$$+ \dots$$

Le calcul est à peine modifié par la présence des variables de seconde espèce.

71. – Le système S admet aussi des invariants ordinaires d'ordre μ qui vérifient les équations

$$\Delta_{ij}\, F = \mu_{ij}\, F, \text{ avec } \begin{cases} \mu_{ij} = \mu, \text{ pour } i = j, \\ \mu_{ij} = 0, \text{ pour } i \neq j, \end{cases}$$

et l'on a

$$F(e') = \delta^{\mu} F(e).$$

On peut former un système fondamental d'invariants entiers, les seuls que nous considérerons, en général en nombre $P - p + 1$; les cas d'exception sont évidents.

Les invariants peuvent aussi toujours être pris homogènes séparément par rapport aux diverses séries de variables et de coefficients qui constituent le système S.

Les invariants s'interprètent comme invariants absolus relatifs aux substitutions σ dont le déterminant est 1, dans les mêmes conditions qu'au N°. 14.

Ils s'interprètent géométriquement comme au N°. 24

Le théorème de Gordan subsiste dans le domaine ternaire.

Les théorèmes des N°s 16 et 18 subsistent entièrement ; de même ceux des N°s 17 et 19 avec les modifications convenables évidentes.

En particulier, les invariants entiers d'ordre μ sont les fonctions entières et homogènes par rapport aux diverses séries d'éléments du système S, isobariques de poids μ, qui vérifient les six conditions $\Delta_{ij} = 0$, pour $i \neq j$.

De plus, si l'invariant est des degrés $k, l, \ldots \varkappa, \lambda, \ldots n, n', \ldots$ par rapport aux diverses séries de variables $(x), (y), \ldots (\xi), (\eta), \ldots$ et des coefficients des formes

$$f = a_{x^p y^q \ldots \xi^\pi \eta^\rho \ldots}, \quad g = b_{x^{p'} y^{q'} \ldots \xi^{\pi'} \eta^{\rho'} \ldots},$$

on a $3\mu = n(p+q+\ldots-\pi-\rho-\ldots) + n'(p'+q'+\ldots-\pi'-\rho'-\ldots)+\ldots$

$$-k-l-\ldots+x+\lambda+\ldots-.$$

D'une façon générale, tout ce que nous avons dit au Chapitre I s'applique encore dans le domaine ternaire après quelques modifications pour ainsi dire évidentes.

---

§3. Quelques formations invariantes.

72.- Les propositions des n°s 25 et 26 relatives aux polaires d'une forme ou d'un invariant par rapport à des variables ou des coefficients subsistent entièrement.

Il est clair aussi que si une forme f ne dépendant que des variables (x), par exemple, est décomposable en facteurs linéaires, de sorte que

$$f = (\alpha/x)\,(\beta/x)\ldots(\lambda/x),$$

tout invariant d'un système dans lequel figurera f sera un invariant des formes $(\alpha/x), (\beta/x)\ldots$ symétrique par rapport aux $(\alpha), (\beta)\ldots$ et réciproquement.

73.- Le déterminant des n^2 coefficients de n formes semblables dépendant chacune de n coefficients est un invariant de ces formes ; c'est d'ailleurs un combinant.

Soient k formes semblables dépendant d'une seule série de variables $f_1 = a_{x^p}$, $f_2 = b_{x^p}$, ..., renfermant chacune par suite

$\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ coefficients, et soit $h < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$. Si ces formes sont liées par une relation linéaire, ce fait subsiste après une transformation linéaire.

Adjoignons aux formes données les $\frac{(q+1)(q+2)}{2}$ formes du type $x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3}g$, où q_1, q_2, q_3, sont des entiers non négatifs de somme q; où g est une forme arbitraire de degré $p-q$ et supposons que l'on puisse choisir q de façon que

$$h + \frac{(q+1)(q+2)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}:$$

alors si les f sont liées par une relation linéaire, il en est de même de l'ensemble formé par les f_i et les formes que nous leur avons adjointes; et ce fait s'exprime par l'évanouissement d'un déterminant.

En particulier, on peut prendre pour g la puissance $(p-q)$ d'une forme linéaire (ξ/x) : on a alors un invariant du système formé par les f_i et les (ξ). La réciproque de ces propositions n'est pas toujours vraie : nous ne la discuterons pas.

On peut étendre ce procédé de formation invariante au cas général, en introduisant plusieurs formes telles que (g) ou bien plusieurs séries de variables telles que (ξ).

Appliquons ce que nous venons de dire aux dérivées partielles d'ordre h de la forme $f = a_{x^p}$; elles sont en nombre $\frac{(h+1)(h+2)}{2}$ et de degré $p-h$, de sortes qu'elles contiennent chacune $\frac{(p-h+1)(p-h+2)}{2}$ coefficients; si h est au plus égal à $\frac{p}{2}$, on a

$$\frac{(p-h+1)(p-h+2)}{2} - \frac{(h+1)(h+2)}{2} = \frac{(p-2h)(p+3)}{2}$$

et ce qui précède peut s'appliquer. En particulier si $h = \frac{p}{2}$, ce qui nécessite p pair, on obtient un déterminant qui est un invariant

proprement dit, et dont l'évanouissement exprime la dépendance linéaire des dérivées partielles d'ordre h de f.

Ce cas particulier s'appliquera par exemple à la polaire d'ordre $2h$ de f, considérée comme fonction des (y), comme au N° 31.

73. — Soit une série $f = a_{x^p}$, de première espèce par exemple, et un élément quelconque d'espèce opposée (ξ/x). Les coordonnées x_2 et x_3 des éléments communs à ces deux séries sont définies par $f(-(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3), \xi_1 x_2, \xi_1 x_3) = 0$, qui est de degré p, de sorte que le nombre de ces éléments communs est p. L'équation que nous venons d'obtenir en x_2 et x_3 a une racine multiple si son discriminant φ_1 est nul : φ_1 est de degré $2(p-1)$ par rapport aux (a), de degré $2p(p-1)$ par rapport aux (ξ). Mais si $\varphi_1 = 0$, il ne s'ensuit pas nécessairement que f et (ξ) ont deux éléments confondus : cette conclusion n'est légitime que si ξ_1 n'est pas nul. Or, si $\xi_1 = 0$, l'équation considérée a un facteur multiple d'ordre p, de sorte que φ_1 contient ξ_1 en facteur. Si l'on fait la substitution :

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = X_1,\ x_2 = X_2,$$

dont le déterminant est indépendant de ξ_1, l'équation en x_2 et x_3 est de la forme $F = A_{X^p} = 0$, et le coefficient A_{p_1, p_2}, contient $\xi_1^{p_2}$ en facteur évidemment ; le discriminant de F qui est de poids $p(p-1)$ par rapport à chaque indice contient donc $\xi_1^{p(p-1)}$ en facteur, et il en est de même de φ_1.

Le quotient $\dfrac{\varphi_1}{\xi_1^{p(p-1)}}$ que nous appellerons φ, égalé à zéro, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que f et (ξ) aient deux éléments confondus. φ est une forme d'espèce opposée

à celle de f, de degré $2(p-1)$ par rapport aux (α) et de degré $p(p-1)$ par rapport aux (ξ) ; c'est un invariant d'ordre $p(p-1)$ de f et de (ξ) : égalée à zéro elle définit la série des éléments (ξ) qui ont avec f deux éléments (x) communs confondus ; la forme φ sera dite <u>équivalente</u> à f.

Il est clair que φ sera nulle identiquement si la forme f n'est pas irréductible et contient un facteur multiple. Si f est décomposable en p facteurs linéaires distincts de sorte que $f = (\alpha/x)(\beta/x)\ldots(\lambda/x)$, on a évidemment

$$\varphi = \Pi(\alpha\beta\xi)^2.$$

74. – Soient deux séries de même espèce $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$; on obtient les coordonnées x_2, x_3 de leurs éléments communs, en remplaçant dans les équations x_1 par $\frac{x_1}{x'_1}$ et éliminant x_1 et x'_1. On a un résultant de degré pp' en x_2 et x_3, des degrés p' et p par rapport aux (b) et aux (a). Il y a donc pp' éléments communs aux deux séries.

Si O_1 est un élément commun aux deux séries, le résultant dont nous venons de parler est nul identiquement, car les équations ont la forme :

$$x_1^{p-q} x_1'^{q} \varphi_q + x_1^{p-q-1} x_1'^{q+1} \varphi_{q+1} + \ldots + x_1'^{p} \varphi_p = 0,$$

$$x_1^{p'-q'} x_1'^{q'} \psi_{q'} + x_1^{p'-q'-1} x_1'^{q'+1} \psi_{q'+1} + \ldots + x_1'^{p'} \psi_{p'} = 0,$$

les φ_i, ψ_i, étant des polynômes homogènes en x_2, x_3 de degré marqué par l'indice.

On supprimera alors les facteurs $x_1'^{q}$ et $x_1'^{q'}$, et l'on fera l'élimination entre les équations nouvelles ainsi obtenues ; le résultant sera de degré $pp' - qq'$ par rapport à x_2 et x_3, comme on le voit sans peine, ce qui montre que O_1 doit être considéré comme qq' fois au

moins commun à f et à g : l'équation obtenue définit les autres éléments communs à f et à g, parmi lesquels peut se retrouver O_1.

Cherchons maintenant l'équation des éléments communs à f et à g. A cet effet, considérons la forme $(\xi/x)=0$; comme on en tire $x_1 = -\frac{\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3}{\xi_1}$, l'élément de seconde espèce (ξ) contiendra un élément commun à f et à g, si les équations

$$f(-(\xi_2 x_2+\xi_3 x_3), \xi_1 x_2, \xi_1 x_3) = 0 \; \& \; g(-(\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3), \xi_1 x_2, \xi_1 x_3) = 0$$

ont une solution commune en x_2 et x_3. Soit Ψ_1 leur résultant, de degré p' par rapport aux (a), p par rapport aux (b), $2pp'$ par rapport aux (ξ). Si $\Psi_1 = 0$, f et g n'ont un élément commun situé sur (ξ) que si ξ_1 n'est pas nul, en général. Comme plus haut, on voit que Ψ_1 contient $\xi_1^{pp'}$ en facteur ; le quotient $\frac{\Psi_1}{\xi_1^{pp'}}$, que nous appellerons Ψ donne donc, quand on l'égale à zéro, la condition nécessaire et suffisante pour que (ξ) contienne un élément commun à f et g ; c'est l'équation des éléments communs à f et g, de degré pp' par rapport aux (ξ).

Ψ est un invariant de degré pp' de f, g et des (ξ) ; c'est une forme qui se décompose en pp' facteurs linéaires :

$$\Psi = (l/\xi)(m/\xi)\ldots ;$$

les (l), (m),.. sont les coordonnées des éléments communs à f et g ; si (l/ξ) figure k fois comme facteur dans Ψ, on dit que (l) est k fois commun à f & g.

La forme Ψ est nulle identiquement si f et g sont identiques, ou bien ne sont pas toutes deux irréductibles et ont un facteur commun. Alors f et g ont une infinité d'éléments communs.

75.- Envisageons maintenant une troisième forme $h = c_{x^{p''}}$, de même espèce que f et g ; pour que ces trois séries aient un élément commun, il faut et il suffit que h contienne un des éléments communs à f et g, dont Ψ fournit l'équation. Ceci conduit à la condition $R = 0$, où

$$R = \Pi \, c_{\xi^{p''}} .$$

Cette fonction R, entière par rapport aux coefficients des trois formes, d'après sa définition et le théorème du n° 66, est le résultant de f, g, h. C'est un invariant d'ordre $pp'p''$ de ces formes, des degrés $p'p''$, $p''p$, pp' respectivement par rapport aux (a), (b), (c).

Le résultant pourrait être obtenu en cherchant d'abord les éléments communs à g et h par exemple, et écrivant que f contient un de ces éléments. La fonction trouvée ne différerait de la précédente que par un facteur numérique.

Le résultant de trois formes de même degré est un combinant de ces formes.

Nous ne dirons rien de plus sur la formation du résultant : les considérations du n° 28 relatives à la détermination des racines communes, lorsque $R = 0$, subsistent entièrement : elles permettent de dire combien de fois un élément commun à f, g, h, doit être regardé comme commun.

76.- Le discriminant d'une forme $f = a_{x^p}$ est le résultant de ses trois dérivées partielles $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial x_3}$; c'est un invariant de f, puisque les dérivées partielles de la transformée de f par rapport aux (x') sont des combinaisons linéaires des dérivées

partielles de f par rapport aux (x). Cet invariant est d'ordre $p(p-1)^2$ et de degré $3(p-1)^2$ par rapport aux (a). Nous verrons plus loin quelle est la signification géométrique de la condition obtenue en égalant à zéro le discriminant de f.

Le discriminant du produit de deux formes est nul identiquement; car les dérivées partielles de ce produit s'annulent pour tout élément commun aux deux formes.

Les considérations du n° 29 relatives aux éléments communs aux dérivées partielles de f subsistent quand on passe dans le domaine ternaire: la démonstration en est cependant moins simple.

77. — Soient $f = a_x{}^p$, $\Psi = B_\xi{}^p$, deux formes de même degré et d'espèce opposée. La fonction

$$K = \Sigma \frac{P_p}{P_{p_1} P_{p_2} P_{p_3}} a_{p_1, p_2, p_3} B_{p_1, p_2, p_3}$$

est un invariant absolu de ces deux formes, car elle vérifie les neuf équations aux dérivées partielles qui caractérisent les invariants absolus de f et Ψ.

Deux formes quelconques d'espèce opposée, $f = a_x{}^p$, $\Psi = B_\xi{}^\pi$, donnent lieu en appliquant la propriété précédente à leurs polaires d'ordre h à l'invariant

$$K^h(f, \Psi) = \Sigma \frac{P_{p-h}}{P_p} \frac{P_{\pi-h}}{P_\pi} \frac{P_h}{P_{h_1 h_2 h_3}} \frac{\partial^h f}{\partial_{x_1}^{h_1} \partial_{x_2}^{h_2} \partial_{x_3}^{h_3}} \frac{\partial^h \Psi}{\partial_{\xi_1}^{h_1} \partial_{\xi_2}^{h_2} \partial_{\xi_3}^{h_3}},$$

les h_i étant des entiers non négatifs dont la somme est h.

78. — Considérons trois formes de même espèce : $f = a_x{}^p$,

$g = b_{x^{p'}}$, $h = c_{x^{p''}}$; en introduisant des notations analogues à celles du n° 34, on constate sans peine que leur Jacobien ou déterminant fonctionnel

$$J(f,g,h) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$$

est un invariant de ces formes et des (x), d'ordre 1.

Si f, g, h ont un élément commun, il appartient aussi à J ; si en outre les degrés de f, g, h sont égaux, les dérivées partielles du premier ordre de J s'annulent pour cet élément commun. Il suffit, pour vérifier ces propositions, de remarquer que l'on a

$$x_1 J(f,g,h) = \begin{vmatrix} f & f_2 & f_3 \\ g & g_2 & g_3 \\ h & h_2 & h_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

d'où en différentiant :

$$J(f,g,h) + x_1 \frac{\partial J(f,g,h)}{\partial x_1} = \begin{vmatrix} p f_1 & f_2 & f_3 \\ p' g_1 & g_2 & g_3 \\ p'' h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & (p-1) f_{12} & f_3 \\ g & (p'-1) g_{12} & g_3 \\ h & (p''-1) h_{12} & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots + \begin{vmatrix} f & f_2 & (p-1) f_{13} \\ g & g_2 & (p'-1) g_{13} \\ h & h_2 & (p''-1) h_{13} \end{vmatrix},$$

On peut multiplier les propositions de ce genre.

Si $J(f,g,h)$ est nul identiquement, l'une des trois formes f, g, h est fonction des deux autres, comme l'on sait.

79. — Le *hessien* d'une forme f est le déterminant

$$J^2(f) = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} ;$$

c'est le jacobien des dérivées partielles de f; c'est un invariant d'ordre 2 de f et des (x). Si les dérivées partielles de f ont un élément commun, $J^2(f)$ et ses dérivées partielles s'annulent pour cet élément.

On peut démontrer sans peine que si $J^2(f)$ est nul identiquement, $f = 0$ représente p éléments (ξ) ayant un élément (x) commun.

Chap. VI...

Chapitre VI.

Généralités sur les séries non linéaires.

§. 1. Les Polaires. Les éléments tangents. Les éléments multiples. La Forme tangentielle.

80. — Soit $f = a_{x^p}$ une série quelconque de première espèce par exemple, et de degré p supérieur à 1. Nous allons étudier les éléments communs à f et à un élément quelconque (ξ) de seconde espèce d'une façon différente de celle indiquée au N°. 73. nous obtiendrons ainsi des résultats nouveaux fort importants.

Déterminons (ξ) par deux éléments (y) et (z), de sorte que $\xi_1 = (yz)_1$, $\xi_2 = (yz)_2$, $\xi_3 = (yz)_3$; un élément quelconque de (ξ) est $(\lambda_1 y + \lambda_2 z)$, c'est-à-dire que ses coordonnées sont $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1, \ldots$ Il appartient à f si l'on a $f(\lambda_1 y + \lambda_2 z) = 0$,

c'est-à-dire

$$a_{y^p}\lambda_1^p + p\, a_{y^{p-1}z}\lambda_1^{p-1}\lambda_2 + \frac{p(p-1)}{1.2}\, a_{y^{p-2}z^2}\lambda_1^{p-2}\lambda_2^2 + \ldots = 0 ;$$

D'abord le discriminant de cette équation en (λ) s'exprime évidemment à l'aide des (ξ) et est la forme φ équivalente à f. Cette équation nous donne aussi tout de suite la signification géométrique des polaires. Soient en effet $(\alpha), (\beta), (\gamma), \ldots$ les p racines de cette équation de sorte qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$(\lambda\alpha)(\lambda\beta)(\lambda\gamma)\ldots = 0.$$

Si (y) et (z) sont tels que $a_{y^{p-h}z^h} = 0$, on a :

$$\Sigma\, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \eta_2 \theta_2 \ldots = 0,$$

les facteurs affectés de l'indice 1 étant en nombre h.

Ceci posé, dans l'espace à une dimension (ξ), les éléments (x) ont pour coordonnées les (λ) ; si (a), (b), (c), ... sont les éléments qui correspondent à (α), (β), (γ), ... le rapport anharmonique $(yzab)$ est égal à $\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2}$; la relation précédente peut alors s'écrire

$$\Sigma_h (yzma)(yznb) \ldots = 0,$$

le nombre des facteurs étant h dans chaque terme, (m), (n), ... étant h éléments fixes parmi ceux communs à (f) et à (ξ) ; de même on peut écrire

$$\Sigma_{p-h} (yzam)(yzbn) \ldots = 0,$$

(m), (n), ... étant $p-h$ éléments fixes communs à f et à (ξ).

Cette équation définit les éléments (y) qui sur (ξ) appartiennent à la h^e polaire de (z) ; d'après le N° 40, ils forment le système polaire d'ordre h de (z), par rapport aux éléments communs à f et à (ξ), dans l'espace (ξ).

La même méthode aurait pu être employée pour obtenir les résultats du N° 40.

En particulier, pour $h = 1$, on a

$$\Sigma (yzma) = 0 \text{ ; pour } h = p-1, \text{ on a } \Sigma (yzam) = 0.$$

81. – Supposons que (y) soit un élément déterminé de f, de sorte que $a_{y^p} = 0$; l'élément quelconque (ξ) ou (yz), a (y) commun avec f une fois seulement en général, car on n'a pas $a_{y^{p-1}z} = 0$. Supposons

que cette dernière condition soit vérifiée, sans l'être pour toute valeur des (z), et par suite (z) appartient à la $(p-1)^{\text{ème}}$ polaire de (y), qui est une série linéaire, ou un élément de seconde espèce (η) : on voit que cet élément (η), et lui seul, a (y) commun avec f plus d'une fois et en général deux fois ; il est dit *tangent* à f en (y), et (y) est son *élément de contact*.

Cette notion s'étend aux séries linéaires ; en chaque élément (x) de (ξ), l'élément tangent est (ξ).

Généralement, si $a_{y^{p-1}z}, \ldots . a_{y^{p-h+1}z^{h-1}}$, sont des formes nulles identiquement quel que soit (z), sans qu'il en soit de même de $a_{y^{p-h}z^{h}}$; ce qui exige que les dérivées partielles de l'ordre $h-1$ de f soient toutes nulles pour (y), sans qu'il en soit de même pour les dérivées partielles d'ordre h ; on dit que l'élément (y) est un *élément multiple d'ordre h* sur f : tout élément (ξ) passant par (y) a (y) commun h fois au moins avec f. Les éléments particuliers (z) tels que $a_{y^{p-h}z^{h}}$ soit nul, déterminent des éléments (η) qui ont plus de h éléments confondus en (y), communs avec f, en général $h+1$. Ces éléments (η) sont en nombre h, distincts ou confondus, car ici $a_{y^{p-h}z^{h}}$ se décompose en h facteurs linéaires par rapport à (z), puisque si (z) vérifie l'équation $a_{y^{p-h}z^{h}}$, il en est de même d'après ce qui précède de tout élément situé sur (yz). Ces éléments (η) sont encore dits tangents à f en (y).

En général, f n'a pas d'éléments multiples ; si en effet (y) est un tel élément, les dérivées partielles du premier ordre de f doivent s'annuler pour (y) ; réciproquement, si ceci a lieu, (y) est un élément multiple, en général double, pour f. De là résulte

la condition nécessaire et suffisante pour que f ait un élément multiple au moins: C'est que son discriminant soit nul.

Les polaires $a_{x^{p-k}y^k}$ d'un élément (y) appartenant à f, qui ne sont pas identiquement nulles, admettent cet élément avec le même ordre de multiplicité, et y ont les mêmes éléments tangents; la polaire $a_{x^{p-k}y^k}$ d'un élément quelconque (y) admet comme élément multiple d'ordre $h-k$ tout élément multiple d'ordre h de f. Ces propositions se démontrent sans peine en supposant que l'élément multiple est 0_1, et remarquant que f prend alors la forme

$$f = x_1^{p-h} f_h(x_2, x_3) + x_1^{p-h-1} f_{h+1}(x_2, x_3) + \dots + f_p(x_2, x_3),$$

les f_i étant des formes en x_2 et x_3 de degré marqué par l'indice.

82.– Si deux séries $f = a_{x^p}$, $g = b_{x^{p'}}$ ont un élément (y) commun des ordres h et k respectivement pour ces deux séries, il compte au moins hk fois parmi les pp' éléments communs à f et à g, d'après le N° 74. De plus, on vérifie que cet élément (y) n'est pas commun plus de hk fois aux deux séries si elles n'ont pas d'éléments tangents communs en (y), c'est-à-dire encore si elles ne sont pas tangentes en (y); si cela arrive, un calcul indiqué au N° 74 permettra de reconnaître dans chaque cas particulier combien de fois (y) est commun aux deux séries; en particulier, si les éléments tangents en (y) à f et à g coïncident en nombre q, (y) est commun au moins $hk + q$ fois à f et à g.

Si f et g sont simplement tangentes en (y), cela veut dire que (y) est simple sur les deux séries qui y ont même élément

tangent et que (y) est deux fois commun aux deux séries.

Cherchons la condition pour que f et g soient tangentes.

Si (x) est l'élément de contact, on a

$$f=0;\quad g=0,\quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_3}}{\frac{\partial g}{\partial x_3}},$$

l'une de ces équations étant conséquence des autres.

Eliminons les (x) entre les équations $f=0$, $g=0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0;$$

on obtient un résultant T' de degré $p'(2p+p'-2)$ par rapport aux (a), de degré $p(2p'+p-2)$ par rapport aux (b); mais si x_1 est nul, et seulement dans ce cas, des équations employées on ne peut rien déduire relativement au rapport $\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}}$; d'ailleurs, si l'on a $f=0$, et $g=0$, avec $x_1=0$, la troisième équation est vérifiée d'elle-même; donc T' contient comme facteur étranger le résultant de $f(0, x_2, x_3)$ et $g(0, x_2, x_3)$, des degrés p' et p par rapport aux (a) et aux (b); en l'enlevant, on obtient la condition cherchée $T=0$, où T est un invariant des degrés $p'(2p+p'-3)$ et $p(2p'+p-3)$ par rapport aux (a) et aux (b), et par suite d'ordre $pp'(p+p'-2)$.

On voit d'ailleurs que T s'annule aussi dès que f a un élément multiple appartenant à g par exemple.

83.- Cherchons les éléments (ξ) tangents à f qui contiennent un élément donné (y); si (x) est l'élément de contact, on a

pour déterminer (x) les deux équations :

$$a_{x^p} = 0, \qquad a_{x^{p-1}y} = 0,$$

qui donnent $p(p-1)$ solutions ; mais (y) restant arbitraire, ces solutions ne sont acceptables qu'autant que (x) n'est pas un élément multiple, et précisément la série $a_{x^{p-1}y}$, qui est la première polaire de (y), contient tous les éléments multiples de f : il faudra donc ôter les solutions correspondantes pour avoir le nombre véritable de solutions proprement dites, nombre qu'on appelle la <u>classe</u> π de la série f.

Si (y) est un élément ordinaire de f, les deux séries $a_{x^p}=0$, $a_{x^{p-1}y}=0$, contiennent (y) et y sont tangentes, après ce qu'on a dit plus haut ; donc (y) compte au moins deux fois comme élément de contact.

84. – La forme φ équivalente à f (73) est de degré $p(p-1)$. Il est évident que, égalée à zéro, elle représente la série des éléments (ξ) tangents à f, et en outre les éléments multiples de f, chacun autant de fois qu'il compte comme commun aux series $a_{x^p} = 0$, $a_{x^{p-1}y} = 0$, (y) restant arbitraire. Si l'on ôte les facteurs qui correspondent dans φ à ces éléments multiples, le degré du facteur restant φ_0 est la classe π de f ; $\varphi_0 = 0$ représente la série des éléments (ξ) tangents à f.

Cette série φ_0 peut être traitée comme f ; si (ξ) est un de ses éléments, tangent à f en (y), comme d'après ce qui a été dit plus haut, (y) et φ_0 ont (ξ) commun au moins deux fois, (y) est tangent à φ_0 et (ξ) est son élément de contact. La forme f_0 équivalente à φ_0 contient donc f, et en outre les éléments multiples de φ_0, appelés

encore éléments tangents multiples de f, chacun autant de fois qu'il compte comme commun à φ_0 et à la première polaire de l'élément arbitraire (η) par rapport à φ_0 ; le degré de f_0 est $\pi(\pi-1)$; la classe de φ_0 est p.

On voit que les formes f et φ_0 jouent l'une par rapport à l'autre un rôle parfaitement réciproque ; chacune des séries ainsi définies est la série des éléments tangents à l'autre. Aussi dirons-nous que chacune d'elles est la forme tangentielle de l'autre. La forme tangentielle ne doit pas être confondue avec la forme équivalente.

Si f n'a aucun élément multiple, on a $\pi = p(p-1)$ et la série φ_0 a nécessairement des éléments multiples ; sauf pour $p=2$, car hors ce cas, on a $p < \pi(\pi-1)$.

Ce qui précède cesse de s'appliquer dans deux cas :

1°. Si f contient des facteurs multiples ; alors φ_0 est nul identiquement.

2°. Si f contient des facteurs linéaires ; si en effet f contient l'élément (ξ), l'élément tangent en (y) sur (ξ) est (ξ) lui-même ; mais $\varphi = 0$ ne le représente pas ; et f_0 ne le contient pas.

---

§.2 - Les éléments inflexionnels. Les éléments stationnaires.

85.- Si (y) est un élément simple de f, l'élément tangent (ξ), $a_{xy^{p-1}} = 0$, n'a en général (y) commun avec f que deux fois ; mais en des éléments particuliers, (y) sera commun à f et à (ξ) plus de deux fois ; il le sera $k+1$ fois si les polaires successives $a_{x^2y^{p-2}} = 0, \ldots$

$a_{x^k y^{p-k}} = 0$, contiennent l'élément (ξ), sans qu'il en soit ainsi de la suivante $a_{x^{k+1} y^{p-k-1}} = 0$, (80).

On dit alors que (ξ) a avec f un contact d'ordre k ; on dit de même plus généralement que deux séries quelconques f et g ont un contact d'ordre k en (y), lorsque (y) étant simple pour ces deux séries, compte $k+1$ fois parmi les éléments communs à ces deux séries. Nous laissons de côté le cas où (y) serait multiple pour l'une des séries, bien que la définition précédente puisse s'étendre facilement à ce cas, avec quelques modifications convenables.

Lorsque l'élément (y), simple sur f, est tel que l'élément tangent (ξ) a avec f un contact d'ordre 2, on peut dire qu'il est <u>inflexionnel</u> sur f ; l'élément tangent lui-même est dit élément tangent <u>stationnaire</u> pour f ; on dit aussi que c'est un élément <u>stationnaire</u>, ou <u>cuspidal</u>, ou de <u>rebroussement</u> de la série tangentielle φ_0. En général, une série f a un nombre limité d'éléments inflexionnels, et n'a pas d'éléments tels que l'ordre du contact de f avec l'élément tangent soit supérieur à 2.

Voici comment on peut déterminer les éléments inflexionnels : en (y), supposé tel, la polaire $a_{x^2 y^{p-2}}$ se décompose, d'après ce qui précède, en deux éléments de seconde espèce, et par suite, d'après la théorie des formes quadratiques exposée plus loin, on a :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} \end{vmatrix} = 0 ,$$

de sorte que (y) appartient à la hessienne H de f, définie par le hessien de f, égalé à zéro.

Réciproquement, si (y) est un élément simple de (f) appartenant aussi à H, la polaire $a_{x^2y^{p-2}}=0$ se décompose en deux éléments de seconde espèce, et d'après une remarque faite plus haut (81) l'un de ces éléments est l'élément tangent (ξ), qui par suite est stationnaire. Les éléments inflexionnels de f sont donc les éléments simples de f communs à f et à H; ils sont en général en nombre $3p(p-2)$ puisque le hessien H de f est de degré $3(p-2)$.

Si $p=2$, H est une constante; cette constante est nulle si f se décompose en deux facteurs linéaires, comme nous le verrons plus loin.

Si f contient un facteur linéaire à la puissance q, H le contient à la puissance $3q-2$ au moins.

La série H contient évidemment tous les éléments multiples que peut posséder f; la présence de tels éléments diminue donc le nombre normal des éléments inflexionnels indiqué plus haut.

Remarquons en outre qu'il peut se faire que des éléments inflexionnels viennent se confondre, ou encore coïncider avec des éléments multiples: mais nous n'entrerons pas dans ces détails.

86.- Si (y) est inflexionnel sur (f), la première polaire d'un élément quelconque (z) appartenant à (ξ) tangent en (y) à (f) est tangente à f en (y), et par suite admet (y) commun avec f deux fois. En effet, les éléments communs à (ξ) et à la

première polaire de (Z) forment le premier système polaire de (Z) sur (ξ) par rapport aux éléments communs à f et à (ξ) (80) ; trois de ces éléments étant confondus en (y), il est clair, d'après les propriétés des polaires binaires que la première polaire de (Z) a avec (ξ) deux éléments communs confondus en (y). Si de plus (Z) vient en (y), et seulement alors, (y) devient trois fois commun à la première polaire de (Z) et à (ξ).

Il résulte immédiatement de là que (ξ) est un élément double pour la série tangentielle φ_0 de f, et que (y) est l'unique élément tangent correspondant.

Ce résultat est d'accord avec ce qui a été dit plus haut sur la diminution des éléments inflexionnels causée par la présence des éléments multiples. Si, par exemple, f n'a pas de tels éléments, φ_0 doit en avoir assez pour n'avoir pas d'éléments inflexionnels qui seraient multiples pour f, contrairement à l'hypothèse.

---

§ 3. Les singularités ordinaires. Les formules de Plücker.

87.- Soit $f = \alpha_x^{\rho}$ une série quelconque que nous supposons ne contenir ni séries multiples, ni séries linéaires.

Si nous appelons singularités ordinaires celles qui se rencontrent nécessairement dans une série f ou dans la série tangentielle φ_0, ce qui a été dit nous amène à considérer 4 singularités ordinaires :

a) un élément double avec éléments tangents distincts ;

α) un élément tangent double avec éléments de contact

distincts ;

β) un élément inflexionnel ;

b) un élément cuspidal, ou stationnaire, ou de rebroussement ; c'est aussi un élément double, mais avec un élément tangent unique, qui admet l'élément double en commun avec la série trois fois seulement.

Les singularités des espèces (a), (α), (b), (β), sont respectivement les singularités des espèces (α), (a), (β), (b) pour la série tangentielle φ_0.

Si nous supposons que f n'admet que des singularités ordinaires et que les nombres de ces singularités soient respectivement d, δ, r, ρ, pour les quatre espèces (a), (α), (b), (β), on peut facilement trouver des relations entre ces nombres, le degré p de f et le degré π de φ_0, qui est aussi la classe de f.

On trouve ces relations de la façon suivante : on sait que la classe de f qui serait $p(p-1)$ si f n'avait aucun élément double, n'est diminuée que par le fait de ces éléments doubles. Quelle est l'influence de ces éléments doubles ? – Considérons d'abord un élément double à éléments tangents distincts. En le plaçant en O, et choisissant convenablement les coordonnées, on peut écrire

$$f = x_2 x_3 x_1^{p-2} + x_1^{p-3} \varphi_3 + \dots + \varphi_p ,$$

φ_i étant une forme de degré i en x_2 et x_3.

La polaire de (y) quelconque peut s'écrire :

$$(y_3 x_2 + y_2 x_3) x_1^{p-2} + x_1^{p-3} \psi_1 + \dots + \psi_{p-1} = 0 ,$$

les ψ_i étant analogues aux φ_i. Elle a en O, un élément simple,

l'élément tangent étant distinct des éléments tangents en O_1, à f; on voit même qu'il est conjugué harmonique de $O_1 y$ par rapport aux éléments tangents à f en O_1. Donc O_1 est commun à f et à cette polaire deux fois seulement, et chaque élément analogue à O_1 diminue la classe de deux unités.

Supposons maintenant que f admette en O_1 un élément cuspidal; on peut écrire, en choisissant les coordonnées convenablement

$$f = x_2^2 x_1^{p-2} + x_1^{p-3}\varphi_3 + \dots + \varphi_p ,$$

et dans φ_3 le coefficient de x_3^3 n'est pas nul, puisque $x_2 = 0$ doit avoir O_1 commun avec f trois fois seulement.

La polaire de (y) est ici:

$$2x_2 y_2 x_1^{p-2} + x_1^{p-3}\left((p-2)y_1 x_2^2 + y_2 \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + y_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3}\right)$$
$$+ \dots + \psi_{p-1} = 0 ;$$

elle admet O_1 comme élément simple, avec même élément tangent que f. Par suite, O_1 est commun trois fois au moins à f et à cette polaire il ne l'est pas davantage, comme on le voit sur le cas particulier très simple

$$f = x_2^2 x_1 + a\, x_3^3 ;$$

donc tout élément analogue à O_1 diminue la classe de trois unités.

Evaluons de même la diminution produite sur le nombre des éléments inflexionnels par les éléments doubles de f.

Prenons les mêmes notations que ci-dessus; pour un élément double ordinaire, la hessienne de f s'écrit:

$$H = (p-1)(p-2)\, x_1^{3p-8} x_2 x_3 + x_1^{3p-9} \psi_3 + \ldots + \psi_{3p-6} = 0 ;$$

elle admet O_1 comme élément double avec mêmes éléments tangents que f ; donc O_1 est commun au moins 6 fois à f et à H ; il ne l'est pas davantage si l'on suppose que les éléments tangents à f en O_1 n'admettent pas O_1 plus de trois fois commun avec f, comme on le voit sur le cas particulier

$$f = x_1 x_2 x_3 + \varphi_3 ;$$

donc un élément double ordinaire diminue le nombre des éléments inflexionnels de six unités.

Enfin, pour un élément cuspidal, on a

$$H = -2(p-1)(p-2) x_1^{3p-9} x_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_3^2} + \ldots + \psi_{3p-6} = 0 ;$$

et la hessienne admet O_1 comme élément triple, deux des éléments tangents étant confondus avec l'élément tangent à f, l'autre étant distinct ; O_1 est donc commun au moins 8 fois à f et à H ; il ne l'est pas davantage, comme le montre le cas particulier déjà employé. Par suite un élément cuspidal diminue le nombre des éléments inflexionnels de 8 unités

88. — On tire de ce que nous venons de dire les relations immédiates

$$\pi = p(p-1) - 2d - 3r ,$$
$$\rho = 3p(p-2) - 6d - 8r ,$$

et de même

$$p = \pi(\pi-1) - 2\delta - 3\rho ,$$
$$r = 3\pi(\pi-2) - 6\delta - 8\rho ;$$

l'une ou l'autre de ces dernières formules donne encore

$$2\delta = p(p-2)(p^2-9) - 4d(p^2-p-5) - 3r(2p^2-2p-9) + (2d+3r)^2 ;$$

on aurait de même $2d$ en fonction de π, δ & ρ.

Telles sont les formules de Plücker ; il y en a trois d'indépendantes entre les 6 nombres $p, d, r, \pi, \delta, \rho$.

On remarquera l'égalité

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} - d - r = \frac{(\pi-1)(\pi-2)}{2} - \delta - \rho = g \;;$$

le nombre g est le genre des séries f et φ_0. Il est facile de voir que g n'est pas négatif, c'est-à-dire que $d+r$ n'est pas supérieur à $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, si toutefois la série f ne se décompose pas en séries de degré inférieur. Si en effet f avait $\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$ éléments doubles, prenons une série f_1 contenant tous ces éléments et qui soit de degré $p-2$; cette série pourra encore être assujettie à contenir $p-3$ éléments arbitraires de f, car

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1 + p - 3 = \frac{(p-2)(p+1)}{2} \;;$$

alors f_1 et f ont en commun $2\left[\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1\right] + p - 3$ éléments au moins ; ce nombre est égal à $p(p-2)+1$; donc il faut que f_1 et f aient une infinité d'éléments communs, et par suite que f se décompose.

Chapitre VII.

Les systèmes linéaires. La forme bilinéaire $a_{x\xi}$.

§ 1. – Les systèmes linéaires.

89. – Soit un système S composé de p séries de variables de première espèce $(x), (y), (z), (t), (u), \ldots$ et de q séries de variables de seconde espèce $(\xi), (\eta), (\zeta), (\theta) \ldots$ On est ramené à ce cas si le système contient des formes linéaires de première ou de seconde espèce en nombre quelconque.

Les quantités telles que (x/ξ), (xyz), $(\xi\eta\zeta)$, forment un système complet d'invariants, respectivement des ordres 0, -1 et 1. Elles sont en nombre

$$pq + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} + \frac{q(q-1)(q-2)}{6},$$

et liées par des relations, car $3(p+q)-8$ d'entre elles sont indépendantes, en général.

Ces relations sont des types suivants:

$$(xyz)(\xi\eta\zeta) = \begin{vmatrix} (x/\xi) & (y/\xi) & (z/\xi) \\ (x/\eta) & (y/\eta) & (z/\eta) \\ (x/\zeta) & (y/\zeta) & (z/\zeta) \end{vmatrix},$$

$$(xtu)(xyz) = \begin{vmatrix} (xyt) & (xyu) \\ (xzt) & (xzu) \end{vmatrix},$$

$$(tuv)(xyz)^2 = \begin{vmatrix} (yzt) & (yzu) & (yzv) \\ (zxt) & (zxu) & (zxv) \\ (xyt) & (xyu) & (xyv) \end{vmatrix},$$

avec les analogues en lettres grecques.

Si l'on a $(x/\xi)=0$, c'est que les éléments (x), et (ξ) se contiennent réciproquement.

Si l'on a $(xyz)=0$, c'est que les éléments (x), (y), (z), sont sur un même élément (ξ).

Les invariants absolus géométriques sont tels que

$$\frac{(x/\xi)(y/\eta)}{(x/\eta)(y/\xi)}\ ; \text{ ou } \frac{(xyt)(xzu)}{(xyu)(xzt)}\ ; \&^{a}$$

90. - Nous avons déjà vu qu'un élément (ξ) par exemple, déterminé par deux éléments (y) et (z), pouvait être regardé comme un espace à une dimension, rempli par les éléments (x) dont les coordonnées ternaires sont

$$x_i = \lambda_1 y_i + \lambda_2 y_i\ ,$$

et dont les (λ) peuvent être considérées comme les coordonnées binaires.

On dit de ces éléments (x) qu'ils forment un faisceau.

Quatre de ces éléments, de coordonnées binaires (λ), (μ), (ν), (ρ) ont un rapport anharmonique tel que $(\lambda\mu\nu\rho) = \frac{(\lambda\nu)(\mu\rho)}{(\lambda\rho)(\mu\nu)}$, qui ne change pas quand on change les éléments fondamentaux (y) et (z), ou que l'on fait une transformation homographique sur l'espace (ξ), etc; ainsi est défini ce que l'on doit entendre par rapport anharmonique de quatre éléments de même espèce appartenant à un même élément d'espèce opposée.

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre éléments de première espèce par exemple, appartenant à un même élément Δ de seconde espèce; soit D un cinquième élément de première espèce, et considérons les quatre éléments de seconde espèce $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, définis par D et C_1, C_2, C_3, C_4. Le rapport anharmonique $(C_1\, C_2\, C_3\, C_4)$ est égal au rapport anharmonique correspondant $(\Gamma_1\, \Gamma_2\, \Gamma_3\, \Gamma_4)$; en effet les deux espaces D et Δ sont en correspondance homographique, puisqu'à un élément C de Δ correspond l'unique élément (DC) ou Γ de D, et inversement. D'ailleurs, si E_1 et E_2 d'équations $(y/\xi) = 0$, $(z/\xi)=0$, sont les éléments fondamentaux sur Δ, et si (DE_1), (DE_2) sont les éléments fondamentaux H_1 et H_2 dans l'espace D, et ont pour équations $(x/\eta)=0$, $(x/\zeta)=0$; si enfin $\lambda_1(y/\xi)+\lambda_2(z/\xi)=0$, est l'équation d'un élément quelconque C de Δ, l'équation de (DC) ou Γ est évidemment $\lambda_1(x/\eta)+\lambda_2(x/\zeta)=0$.

Ce que nous venons de dire contient en particulier la propriété du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites coupé par une sécante quelconque.

L'invariant $\dfrac{(x/\xi)(y/\eta)}{(x/\eta)(y/\xi)}$ est maintenant facile à interpréter : c'est, comme le montre un calcul facile, le rapport anharmonique des deux éléments (x), (y) par exemple, avec les deux éléments de même espèce communs à (xy) et à (ξ), (η).

De même l'invariant $\dfrac{(xyt)(xzu)}{(xyu)(xzt)}$ est le rapport anharmonique des éléments de seconde espèce déterminés par (x) associé à (y), (z), (t), (u) successivement.

91.- Nous n'insisterons pas sur toutes les propositions géométriques auxquelles conduisent les considérations précédentes. Nous donnerons seulement les définitions suivantes.

Deux faisceaux d'espèce différente, dont les éléments ont respectivement pour coordonnées binaires (λ) et (λ') sont homographiques, si les (λ) sont liées aux (λ') par les formules d'une substitution linéaire. S'ils remplissent les deux espaces D et Δ, on peut chercher les éléments Γ de D, qui contiennent leur correspondant C sur Δ ; ce sont évidemment les éléments doubles de la correspondance homographique entre les éléments Γ et la série des éléments de même espèce remplissant le même espace D, déterminés par D et les éléments C qui correspondent aux Γ. S'il arrive que chaque élément Γ contienne son correspondant C, on dit que les deux faisceaux sont <u>homologiques</u>.

Deux faisceaux de même espèce sont homographiques dans les mêmes conditions que deux faisceaux d'espèce différente; ils sont <u>homologiques</u> si leur élément commun se correspond à lui-même dans les deux faisceaux ; dans ce cas, et seulement dans ce cas, (sauf si l'homographie est singulière) il arrive, comme on le vérifie facilement, que C et C' par exemple étant deux éléments correspondants, l'élément (CC') contient un élément D fixe.

Le faisceau déterminé par les éléments (DC) ou (DC') est alors homologique des faisceaux donnés.

---

§.2...

§. 2. La correspondance homographique. La forme bilinéaire $a_{x\xi}$.

92. — Une homographie entre deux espaces T et T' remplis par les éléments (x) et (x') est définie par les formules

$$\frac{x_1}{\lambda_{11}x'_1+\lambda_{12}x'_2+\lambda_{13}x'_3}=\frac{x_2}{\lambda_{21}x'_1+\lambda_{22}x'_2+\lambda_{23}x'_3}=\frac{x_3}{\lambda_{31}x'_1+\lambda_{32}x'_2+\lambda_{33}x'_3};$$

d'une façon générale, on peut dire que deux éléments correspondants des deux espaces sont deux espaces à une dimension qui sont mis eux-mêmes en correspondance homographique par les formules précédentes, si l'on a soin d'associer ensemble les éléments correspondants qui leur appartiennent.

Il y a par suite conservation du rapport anharmonique de quatre éléments appartenant à un faisceau.

En supposant que le déterminant δ des (λ) est nul, ou même que tous les mineurs de δ sont nuls, on peut comme au N.º 41 définir des homographies singulières sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Envisageons le cas particulièrement intéressant où les espaces T et T' coïncident, et où les éléments correspondants (x) et (x') sont de même espèce, et rapportés aux mêmes coordonnées, ce qui ne diminue pas la généralité. Si nous appelons X et Y les deux séries homographiques qui remplissent l'espace considéré, et si (x) et (y) sont deux éléments appartenant respectivement à X et à Y, on a entre leurs coordonnées les relations

$$\frac{x_1}{\lambda_{11}y_1+\lambda_{12}y_2+\lambda_{13}y_3} = \frac{x_2}{\lambda_{21}y_1+\lambda_{22}y_2+\lambda_{23}y_3} = \frac{x_3}{\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2+\lambda_{33}y_3},$$

de sorte que l'équation de (x) est

$$\xi_1(\lambda_{11}y_1+\lambda_{12}y_2+\lambda_{13}y_3)+\xi_2(\lambda_{21}y_1+\lambda_{22}y_2+\lambda_{23}y_3)$$
$$+\xi_3(\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2+\lambda_{33}y_3)=0.$$

Nous sommes ainsi amenés à l'étude de la forme bilinéaire dépendant des (x) et des (ξ) :

$$f=a_{x\xi}=\xi_1(\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\lambda_{13}x_3)+\xi_2(\lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\lambda_{23}x_3)$$
$$+\xi_3(\lambda_{31}x_1+\lambda_{32}x_2+\lambda_{33}x_3),$$

où nous avons conservé les (λ) pour représenter les coefficients afin d'abréger l'écriture.

93. – Nous allons étudier le système S formé par la forme f et les variables (x) et (ξ).

Tout d'abord nous remarquerons qu'en désignant par μ_{ij} le coefficient de λ_{ij} dans δ, on a d'après les formules du N° 68, les résultats suivants :

1°. – $f(x,\xi)=0$ est, si (x) est donné appartenant à Y, l'équation de l'élément correspondant dans X ; c'est aussi, si (ξ) est donné appartenant à X, l'équation de l'élément correspondant dans Y.

2° $g(x,\xi)=\xi_1(\mu_{11}x_1+\mu_{21}x_2+\mu_{31}x_3)+\xi_2(\mu_{12}x_1+\mu_{22}x_2+\mu_{32}x_3)$
$+\xi_3(\mu_{13}x_1+\mu_{23}x_2+\mu_{33}x_3)=0$

est, si (x) est donné appartenant à X, l'équation de l'élément correspondant dans Y ; c'est aussi, si (ξ) est donné appartenant à Y, l'équation de l'élément correspondant dans X.

On a d'ailleurs les identités :

$$g = -\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & x_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & x_2 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad f\delta = -\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \xi_1 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \xi_2 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix},$$

δ désignant le déterminant des (λ).

Les invariants du système considéré sont faciles à former ; aux formes f, g, cette dernière étant évidemment un invariant, nous adjoindrons d'abord la forme

$$h = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3,$$

puis les formes k et θ, qui sont les jacobiens de f, g, h considérés comme fonctions soit des (ξ), soit des (x) : k et θ sont des formes cubiques par rapport aux (x) et aux (ξ) :

$$k = \begin{vmatrix} \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3 & \cdots\cdots \\ \mu_{11} x_1 + \mu_{21} x_2 + \mu_{31} x_3 & \cdots\cdots \\ x_1 & \cdots\cdots \end{vmatrix},$$

$$\theta = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \xi_1 + \lambda_{21} \xi_2 + \lambda_{31} \xi_3 & \cdots\cdots \\ \mu_{11} \xi_1 + \mu_{12} \xi_2 + \mu_{13} \xi_3 & \cdots\cdots \\ \xi_1 & \cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Cherchons maintenant les éléments (x) doubles, c'est-à-dire qui se correspondent à eux-mêmes dans X et Y.

Pour les déterminer, on a évidemment les équations :

$$\begin{cases} (\lambda_{11}-\rho)\, x_1 + \lambda_{12}\, x_2 + \lambda_{13}\, x_3 = 0, \\ \lambda_{21}\, x_1 + (\lambda_{22}-\rho_2) + \lambda_{23}\, x_3 = 0, \\ \lambda_{31}\, x_1 + \lambda_{32}\, x_2 + (\lambda_{33}-\rho)\, x_3 = 0, \end{cases}$$

ρ étant une inconnue auxiliaire déterminée par :

$$\varphi(\rho) = \begin{vmatrix} \lambda_{11}-\rho & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\rho & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}-\rho \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien $$\rho^3 - i\rho^2 + j\rho - \delta = 0,$$

où l'on a fait $$i = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33},$$
$$j = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}.$$

Les coefficients i, j, δ sont évidemment des invariants proprement dits, d'ordre zéro, car les racines de l'équation en ρ sont manifestement invariantées.

On arriverait au même résultat par les équations

$$\begin{cases} (\mu_{11}-\sigma)\, x_1 + \mu_{21}\, x_2 + \mu_{31}\, x_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases},$$

qui conduisent à

$$\sigma^3 - j\,\sigma^2 + i\,\delta\,\sigma - \delta^2 = 0,$$

de sorte que $\rho\sigma = \delta$.

De même encore les éléments doubles de seconde espèce (ξ) sont déterminés par les équations

$$\begin{cases} (\lambda_{11}-\rho)\,\xi_1 + \lambda_{21}\,\xi_2 + \lambda_{31}\,\xi_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} (\mu_{11}-\sigma)\,\xi_1 + \mu_{12}\,\xi_2 + \mu_{13}\,\xi_3 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous avons ainsi trouvé les huit invariants $f, g, h, k, \theta, i, j, \delta$, qui forment un système complet. Sept d'entre eux seulement sont indépendants ; la relation qui existe entre eux tous est

indiquée plus loin.

94.— On serait arrivé aux mêmes résultats en considérant les invariants K définis au N° 77.

Considérons d'abord f comme fonction des (ξ), g comme fonction des (x); l'invariant K est alors δh; il en est de même si l'on considère f et g comme fonction des (x) et des (ξ). C'était d'ailleurs évident géométriquement. Considérons maintenant f comme fonction des (x) et des (ξ) successivement, il en résulte un invariant K que l'on vérifie sans peine être égal à

$$if - jh + g;$$

c'est aussi

$$(\lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \lambda_{13} x_3)(\lambda_{11} \xi_1 + \lambda_{21} \xi_2 + \lambda_{31} \xi_3) + \dots,$$

et d'après cela on voit que

$$if - jh + g = 0$$

est l'équation de (z) appartenant à X, correspondant à (y) de Y, (y) correspondant lui même dans X à (x) de Y; c'est aussi l'équation de (ζ) appartenant à Y, correspondant à (η) de X, (η) correspondant lui-même dans Y à (ξ) de X.

Dans le premier cas, les équations de (x) et (y) étant $h = 0$ et $f = 0$, on voit que les éléments (x), (y), (z) appartiennent à un même faisceau si l'on a $k = 0$, et seulement alors; dans le second cas, on voit de même que (ξ), (η), (ζ) appartiennent à un même faisceau si l'on a $\theta = 0$ et seulement alors.

En appliquant le même procédé à g, on trouve de même que la quantité

$$(\mu_{11} x_1 + \mu_{21} x_2 + \mu_{31} x_3)(\mu_{11} \xi_1 + \mu_{12} \xi_2 + \mu_{13} \xi_3) + \dots$$

est égale à

$$jg - i\delta h + \delta f\ ;$$

l'équation $jg - i\delta h + \delta f = 0$ s'interprète comme plus haut.

En vertu des relations que nous venons d'obtenir on trouv[e]
tout de suite par multiplication de deux déterminants

$$k\theta = \begin{vmatrix} if - jh + g & \delta h & f \\ \delta h & jg - i\delta h + \delta f & g \\ f & g & h \end{vmatrix},$$

ce qui est la relation entre les huit invariants du système.

Les invariants absolus géométriques proprement dits dépen[dent]
dent des rapports des racines des équations en ρ ou σ, c'est-à-
dire encore des rapports des quantités i^6, j^3 & δ^2.

95. — Pour aller plus loin, examinons successivement les
divers cas que l'on rencontre quand on fait les différentes hypoth[èses]
possibles sur les racines ρ_1, ρ_2, ρ_3, de l'équation en ρ.

I. — <u>L'équation en ρ a trois racines distinctes.</u>

Alors il y a trois éléments doubles distincts de chaque [es-]
pèce, n'appartenant pas à un même faisceau. Si les (x) doubl[es]
sont pris pour les éléments fondamentaux, on a

$$f = \lambda_{11} x_1 \xi_1 + \lambda_{22} x_2 \xi_2 + \lambda_{33} x_3 \xi_3\ ,$$

$$g = \lambda_{22}\lambda_{33} x_1 \xi_1 + \lambda_{33}\lambda_{11} x_2 \xi_2 + \lambda_{11}\lambda_{22} x_3 \xi_3$$

$$i = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}\ ,\ j = \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{33}\lambda_{11} + \lambda_{11}\lambda_{22}\ ,\ \delta = \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}\ ,$$

et en appelant λ le produit non nul $(\lambda_{22} - \lambda_{33})(\lambda_{33} - \lambda_{11})(\lambda_{11} - \lambda_{22})$,

$$k = \lambda x_1 x_2 x_3\ ,\quad \theta = \lambda \xi_1 \xi_2 \xi_3\ .$$

Ces formules simples nous montrent que les Ω_i sont le[s]

éléments doubles de seconde espèce ; que $k = 0$ est leur équation, et que $\theta = 0$ est l'équation des éléments doubles de première espèce, les O_i.

Ces formules permettent aussi de résoudre beaucoup de questions sur l'homographie ternaire simplement ; nous remarquerons seulement la proposition suivante : soient (x) et (y) deux éléments correspondants de X et Y ; leur rapport anharmonique avec les éléments doubles Ω_2 et Ω_3 est $\frac{x_2 y_3}{x_3 y_2}$ et par suite a la valeur constante $\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{33}}$; la même chose a lieu pour les autres éléments doubles et aussi pour les éléments de seconde espèce ; on a ainsi la signification géométrique des invariants absolus.

<u>II. – ρ_1 est racine simple ; on a $\rho_2 = \rho_3$, et cette racine double n'annule pas les mineurs du déterminant $\varphi(\rho)$.</u>

Nous n'insisterons pas sur ce cas, que l'on peut considérer comme limite du précédent. On peut réduire f à la forme simple

$$f = \lambda_{11} x_1 \xi_1 + (\lambda_{22} x_2 + \lambda_{23} x_3) \xi_2 + \lambda_{33} x_3 \xi_3 ,$$

avec $$\lambda_{22} = \lambda_{33} , \quad \lambda_{22} \neq \lambda_{11} , \quad \lambda_{23} \neq 0 .$$

O_1 et O_2, Ω_1 et Ω_3 sont doubles ; O_1 et Ω_1 correspondent à ρ_1, O_2 et Ω_3 correspondent à la racine double ρ_2.

<u>III. – ρ_1 est racine simple ; on a $\rho_2 = \rho_3$, et cette racine double annule les mineurs de $\varphi(\rho)$.</u>

Dans ce cas, à ρ_1 correspond un élément double de chaque espèce ; ces éléments ne se contiennent pas et peuvent être pris pour O_1 et Ω_1 ; à la racine double correspondent tous les éléments que contiennent Ω_1 et O_1, comme doubles. Dans ce cas, la forme canonique du cas I subsiste, avec $\lambda_{22} = \lambda_{33}$, de sorte que k et θ sont nuls identiquement.

Deux éléments correspondants de première ou seconde espèce appartiennent avec O_1 ou Ω_1, à un même faisceau; si (x) et (y) sont deux tels éléments et si (z) est commun à Ω_1 et à (xy), le rapport anharmonique $(xy\,O_1 z)$ a une valeur constante; on dit qu'il y a homologie.

IV.- ρ_1 est racine triple et n'annule pas les mineurs de $\varphi(\rho)$.

A ρ_1 correspond un élément double de chaque espèce, et ces éléments se contiennent; en les prenant pour O_2 et Ω_3, on a:

$$f = \xi_1(\lambda_{11}x_1 + \lambda_{13}x_3) + \xi_2(\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3) + \lambda_{33}x_3\xi_3,$$

avec $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33}$, $\lambda_{13}\lambda_{21} \neq 0$;

c'est un cas limite de II.

V.- ρ_1 est racine triple et annule les mineurs de $\varphi(\rho)$.

A ρ_1 correspondent une infinité d'éléments doubles de chaque espèce, situés sur deux éléments O_2 et Ω_3 qui se contiennent; alors on a:

$$f = \lambda_{11}x_1\xi_1 + (\lambda_{22}x_2 + \lambda_{23}x_3)\xi_2 + \lambda_{33}x_3\xi_3,$$

avec

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33}, \quad \lambda_{23} \neq 0;$$

c'est un cas limite de l'homologie.

VI.- ρ_1 est racine triple et annule les éléments de $\varphi(\rho)$.

Tous les éléments sont doubles; on a $f = \lambda_{11}h$.

96.- Dans quel cas y a-t-il involution, c'est-à-dire un élément quelconque a-t-il toujours même correspondant, qu'on le considère

comme appartenant à X ou à Y ? D'après le N° 94, il faut que $if - jh + g$ se réduise à un facteur près à h ; donc d'abord k est nul identiquement. En exceptant le cas VI, sans intérêt, on voit que toutes les conditions sont vérifiées :

1° dans le cas III, si l'on a $\lambda_{11} + \lambda_{22} = 0$;

2° dans le cas V, si l'on a $\lambda_{11} = 0$.

Laissant de côté le second cas dans lequel l'homographie est singulière, il reste l'unique premier cas. On voit sans peine que sur chaque élément double, il y a involution déterminée par les éléments correspondants ; le rapport anharmonique tel que $(xy0,z)$ considéré plus haut est égal à -1.

97. – Cherchons, dans le cas général I, par quelles transformations on peut passer de la forme f à la forme canonique

$$f = \lambda'_{11} x'_1 \xi'_1 + \lambda'_{22} x'_2 \xi'_2 + \lambda'_{33} x'_3 \xi'_3 .$$

A la racine ρ_i de l'équation en ρ correspond l'élément double Ω'_i, dont l'équation est déterminée par :

$$x_1 \xi_1^{(i)} + x_2 \xi_2^{(i)} + x_3 \xi_3^{(i)} = 0 ,$$

$$(\lambda_{11} - \rho_i) \xi_1^{(i)} + \lambda_{21} \xi_2^{(i)} + \lambda_{31} \xi_3^{(i)} = 0 ,$$

$$\lambda_{12} \xi_1^{(i)} + (\lambda_{22} - \rho_i) \xi_2^{(i)} + \lambda_{32} \xi_3^{(i)} = 0 ,$$

$$\lambda_{13} \xi_1^{(i)} + \lambda_{23} \xi_3^{(i)} + (\lambda_{33} - \rho_i) \xi_3^{(i)} = 0 ;$$

si (y) et (z) sont des éléments quelconques, les trois dernières relations peuvent être remplacées par

$$f(y, \xi^{(i)}) - \rho_i h(y, \xi^{(i)}) = 0 ,$$

$$f(z, \xi^{(i)}) - \rho_i h(z, \xi^{(i)}) = 0 ,$$

et l'équation de Ω'_i est par suite :

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda_{11} y_1 + \lambda_{12} y_2 + \lambda_{13} y_3 - \rho_i y_1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{11} z_1 + \lambda_{12} z_2 + \lambda_{13} z_3 - \rho_i z_1 & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

(columns headed x_1, x_2, x_3)

c'est-à-dire en posant $(yz)_i = \eta_i$:

$$g(x,\eta) + \rho_i \left(f(x,\eta) - i h(x,\eta) \right) + \rho_i^2 h(x,\eta) = 0.$$

D'après cela nous pouvons poser, (η) étant quelconque :

$$x'_i = \rho_i f(x,\eta) + g(x,\eta) + \rho_i (\rho_i - i)\, h(x,\eta) ;$$

le déterminant de cette substitution pour passer des (x') aux (x) est égal à

$$-(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)\, \theta(\eta).$$

Un calcul facile donne ensuite en partant des (x'_i) posant $t_i = (\xi \eta)_i$, et appelant λ le jacobien par rapport aux (x) des formes $f(x,\eta)$, $g(x\eta)$ & $h(x,\xi)$:

$$\xi'_i = \frac{1}{(\rho_i - \rho_j)(\rho_i - \rho_k)\, \theta(\eta)} \left(\rho_j \rho_k f(t,\eta) - \rho_i g(t,\eta) + \lambda \right),$$

ρ_j et ρ_k désignant les racines de $\varphi(\rho)$ autres que ρ_i.

Quant aux coefficients, on a $\lambda'_{ii} = \rho_i$.

On aurait des formules analogues en partant des équations des éléments doubles de première espèce O'_i.

Chapitre VIII.

La forme quadratique et les systèmes de deux formes quadratiques.

§1. La forme quadratique.

98.– La forme quadratique $f = a_{x^2}$ que nous écrirons pour abréger

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}\,x_2x_3 + 2a_{31}\,x_3x_1 + 2a_{12}\,x_1x_2\,,$$

ne dépend que de six coefficients, et cependant, a un invariant, son hessien, que nous écrirons:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

On sait que si d est nul, f se décompose en un produit de deux facteurs linéaires; et que si tous les mineurs de d sont nuls, ces deux facteurs sont proportionnels, de sorte que f est un carré parfait. En général, d n'est pas nul; alors $f = 0$ est une série quadratique proprement dite, qui n'a aucune singularité; sa classe est, comme son degré, 2.

L'élément (ξ) est tangent à f en (x), si l'on a, en faisant

$$f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\frac{f x_1}{\xi_1} = \frac{f x_2}{\xi_2} = \frac{f x_3}{\xi_3},\ f = 0,\ (\xi/x) = 0,$$

d'où la condition

$$\varphi = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

la forme équivalente à f, ou la forme tangentielle de f, d n'étant pas nul, est donc

$$\varphi = \alpha_{\xi^2},$$

en posant

$$\alpha_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2,\ \dots\ \alpha_{23} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23},\ \dots\dots$$

Le système formé par f, les (x), les (ξ) admet les quatre invariants f, φ, d & (x/ξ).

On a

$$a_{11}\alpha_{11} + \dots + 2a_{23}\alpha_{23} + \dots = 3d;$$

le hessien de φ est $\delta = d^2$; la forme tangentielle de φ, obtenue en partant de φ comme φ en partant de f, est fd de sorte que

$$fd = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si d est nul, sans que tous ses mineurs le soient, f se décompose en un produit de deux facteurs linéaires distincts:

$$f = (\eta/x)(\zeta/x).$$

Les éléments (η) et (ζ) ont en commun un élément (y) qui vérifie les trois équations $f_{y_i} = 0$, alors compatibles; en faisant $y_i = (\eta/\zeta)_i$

on voit facilement que $\varphi = -\frac{1}{4}(y/z)^2$.

Si les mineurs de d sont tous nuls, φ est nul identiquement ; on a

$$f = (\eta/x)^2.$$

Les f_{x_i} sont proportionnels à (η/x) ; on a :

$$a_{xy} = (\eta/x)(\eta/y),$$

ce qui détermine facilement (η/x).

99. — Si l'on adjoint à la forme f les variables (x) et (y) on a les invariants a_{x_2}, a_{y_2}, D, et la polaire a_{xy}.

D'après les propriétés générales des polaires, $a_{xy}=0$ est une série linéaire qui est le lieu des éléments (x) conjugués harmoniques de l'élément (y) par rapport aux éléments communs à f et à (xy).

La symétrie de l'équation $a_{xy}=0$ par rapport aux (x) et aux (y) montre que si (x) appartient à la polaire de (y), (y) appartient inversement à la polaire de (x) ; (x) et (y) sont alors dits conjugués par rapport à f.

Si quatre éléments (y), (z), (t), (u) appartiennent à un même faisceau, il en est de même de leurs polaires, et le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique $(yztu)$; en effet, les coordonnées des éléments (x) et celles de leurs polaires sont liées par les formules d'une substitution linéaire, de sorte qu'une homographie particulière est ainsi définie.

Si (η) est la polaire de (y) par rapport à f, (y) est aussi la polaire de (η) par rapport à φ (si d n'est pas nul), comme le montre un calcul facile. Nous dirons indifféremment, suivant la commodité du langage, que (y) et (η) sont pôle et polaire par

rapport à f et à φ. En supposant toujours d non nul, (y) n'appartient à sa polaire (η) que si (y) appartient à (f), et alors (η) est l'élément tangent à f en (y); on voit aussi que (η) contient les éléments de contact des éléments tangents menés à f par y; que si (y), (z), (t) appartiennent à un même faisceau ainsi que (y), (z'), (t') et si (z), (t), (z'), (t') appartiennent à f, (η) contient l'élément commun à (zz') et (tt'); etc. Les mêmes choses ont lieu par rapport à φ.

Si $d=0$ sans que ses mineurs soient nuls, et si (y) est alors l'élément double de f, la polaire de (z) est l'élément conjugué harmonique de (yz) par rapport aux éléments qui constituent f; la polaire de (y) est indéterminée. Inversement on en déduit la position du pôle d'un élément (ξ).

Si $d=0$ et si ses mineurs sont tous nuls, la polaire de (y) est l'élément représenté deux fois par f; si (y) appartient à f, sa polaire est indéterminée.

100.– Nous n'insisterons pas sur les invariants du système formé par f et un nombre quelconque de variables (x) ou (ξ); ils sont tous de types déjà connus. Nous signalerons seulement quelques identités souvent utiles.

On a d'abord

$$(I)\quad \alpha_{\xi\eta} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (II)\quad d\,a_{xy} = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(III)\ \alpha_{(\xi\eta)(\zeta\theta)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 & \eta_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 & \eta_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \xi_3 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (IV)\ \alpha_{(xy)(zt)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_1 & y_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & x_2 & y_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & x_3 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

où $(\xi\eta)$ désigne comme d'habitude l'élément de première espèce défini par (ξ) et (η), comme étant leur élément commun. D'ailleurs dans ces formules, comme dans les suivantes, des variables telles que (x) et (z) pourront être supposées identiques à volonté.

Si dans (I) on remplace les (η) par les (f_y), le premier membre devient $d(\xi/y)$ ainsi qu'il était facile de le prévoir ; si on remplace encore les (ξ) par les (f_x), le premier membre devient $d\,\alpha_{xy}$.

De même si dans (II) on remplace les (y) par les (φ_η), le premier membre devient $d^2(x/\eta)$; remplaçant encore les (x) par les $(\varphi\xi)$, on obtient $d^2\alpha_{\xi\eta}$.

Dans (III), remplaçons les (η) par les (f_y) ; le premier membre devient $\alpha_{\xi(y(\zeta\theta))}$; remplaçons encore les (ξ) par les (f_x) ; on obtient $d\,(xy(\zeta\theta))$. Remplaçons les (η) par les (f_y) et les (θ) par les (f_t), on a $a_{yt}\,\alpha_{\xi\zeta} - d(y/\zeta)(t/\xi)$; remplaçons les (ξ), les (η) et les (θ) comme précédemment : on obtient $d\big((x/\zeta)a_{yt} - (y/\zeta)a_{xt}\big)$. Enfin, si l'on remplace encore les (ζ) par les (f_z), on obtient finalement

$$d\,(a_{xz}\,a_{yt} - a_{yz}\,a_{xt}).$$

On pourra opérer de même sur l'identité (IV).

On a...

On a aussi

$$\begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ f_{y_1} & f_{y_2} & f_{y_3} \\ f_{z_1} & f_{z_2} & f_{z_3} \end{vmatrix} = d(xyz), \quad \begin{vmatrix} \varphi_{\xi_1} & \varphi_{\xi_2} & \varphi_{\xi_3} \\ \varphi_{\eta_1} & \varphi_{\eta_2} & \varphi_{\eta_3} \\ \varphi_{\zeta_1} & \varphi_{\zeta_2} & \varphi_{\zeta_3} \end{vmatrix} = d^2(\xi\eta\zeta),$$

et par suite immédiatement

$$\begin{vmatrix} \alpha_{xt} & \alpha_{yt} & \alpha_{zt} \\ \alpha_{xu} & \alpha_{yu} & \alpha_{zu} \\ \alpha_{xv} & \alpha_{yv} & \alpha_{zv} \end{vmatrix} = d(xyz)(tuv), \quad \begin{vmatrix} \alpha_{\xi\theta} & \alpha_{\eta\theta} & \alpha_{\zeta\theta} \\ \alpha_{\xi\chi} & \alpha_{\eta\chi} & \alpha_{\zeta\chi} \\ \alpha_{\xi\lambda} & \alpha_{\eta\lambda} & \alpha_{\zeta\lambda} \end{vmatrix} = d^2(\xi\eta\zeta)(\theta\chi\lambda).$$

Enfin considérons $\alpha_{xz}\alpha_{yt} - \alpha_{yz}\alpha_{xt}$; ce déterminant est le produit des deux matrices

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{Vmatrix} \quad \& \quad \begin{Vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ f_{y_1} & f_{y_2} & f_{y_3} \end{Vmatrix},$$

et par suite, d'après une règle connue, est encore égal à $\alpha_{(xy)(zt)}$, de sorte que

$$\alpha_{xz}\alpha_{yt} - \alpha_{yz}\alpha_{xt} = \alpha_{(xy)(zt)} ;$$

de même

$$\alpha_{\xi\zeta}\alpha_{\eta\theta} - \alpha_{\eta\zeta}\alpha_{\xi\theta} = d\alpha_{(\xi\eta)(\zeta\theta)}.$$

En particulier, on aura

$$\alpha_{x^2}\alpha_{y^2} - \alpha_{xy}^2 = \alpha_{(xy)^2},$$

$$\alpha_{\xi^2}\alpha_{\eta^2} - \alpha_{\xi\eta}^2 = d\alpha_{(\xi\eta)^2}.$$

101. – L'équation des éléments tangents à f qui contiennent (y) est évidemment

$$\alpha_{(xy)^2} = 0,$$

ou bien

$$\alpha_{x^2}\alpha_{y^2} - \alpha_{xy}^2 = 0.$$

La forme équivalente à $\alpha_{(xy)^2}$, considérée comme forme quadratique par rapport aux (x) est, par un calcul facile, $d\,a_{y^2}(\xi/y)^2$; elle est nulle identiquement pour $a_{y^2}=0$, ainsi qu'il était facile de le prévoir.

On retrouve ces résultats ainsi : soit (x) un élément quelconque, de sorte que tout élément de (xy) est $(\lambda_1 x+\lambda_2 y)$; cet élément appartient à f si l'on a

$$\lambda_1^2 a_{x^2}+2\lambda_1\lambda_2 a_{xy}+\lambda_2^2 a_{y^2}=0\ ;$$

cette équation définit les éléments communs à f et à (xy); ils sont confondus, c'est-à-dire que (xy) est tangent à f si l'on a

$$a_{x^2}a_{y^2}-a_{xy}^2=0.$$

En éliminant (λ) entre l'équation précédente et l'équation

$$\lambda_1(x/\xi)+\lambda_2(y/\xi)=0,$$

on obtient

$$a_{x^2}(y/\xi)^2-2a_{xy}(x/\xi)(y/\xi)+a_{y^2}(x/\xi)^2=0\ :$$

c'est l'équation des éléments communs à f et à (xy); on peut l'écrire aussi, en appliquant ce qui vient d'être dit à φ,

$$\alpha_{\xi^2}\alpha_{(xy)^2}-\alpha^2_{\xi(xy)}=d\,a_{(\xi(xy))^2}=0\ ;$$

en fait, il y a identité entre le premier membre de cette équation et celui de la précédente, au facteur d près. Appliquons ceci en remplaçant les (xy) par les (f_z) ; nous aurons l'équation des éléments de contact des éléments tangents menés à f par (z), soit d'après les identités connues :

$$\alpha_{\xi^2}a_{z^2}-d(\xi/z)^2=0.$$

La même équation convient, en y regardant les (z) comme variables et les (ξ) comme donnés, pour représenter les éléments

tangents à f aux éléments communs à f et à (ξ).

Le rapport anharmonique ρ des éléments (x) et (y) associés aux éléments communs à f et à (xy) est, d'après une équation précédente, facile à calculer.

On a :

$$\rho = \frac{a_{xy} + \sqrt{\alpha_{(xy)^2}}}{a_{xy} - \sqrt{\alpha_{(xy)^2}}}.$$

Si (y) et ρ sont donnés, le lieu de (x) est une série quadratique facile à définir plus complètement. Dans le cas particulier de $\rho = -1$, on retrouve $a_{xy} = 0$. De même le rapport anharmonique ρ des éléments tangents à f menés par $(\xi\eta)$ sera

$$\rho = \frac{\alpha_{\xi\eta} + \sqrt{d\,a_{(\xi\eta)^2}}}{\alpha_{\xi\eta} - \sqrt{d\,a_{(\xi\eta)^2}}}.$$

102.– On a l'identité

$$a_{x^2}\, a_{y^2} - a^2_{xy} = \alpha_{(xy)^2} ;$$

de même on aura

$$\alpha_{(xy)^2}\, \alpha_{(yz)^2} - \alpha^2_{(xy)(yz)} = d\, a_{y^2}\, (xyz)^2 ,$$

car $\big((xy)(yz)\big)_i = y_i\, (xyz)$.

Par suite, il vient

$$\alpha_{(yz)^2}\, a_{y^2}\, a_{x^2} = \alpha_{(yz)^2}\, a^2_{xy} + \alpha^2_{(xy)(yz)} + d\, a_{y^2}\, (xyz)^2 ,$$

identité qui fournit de la façon la plus générale la décomposition de a^2_x en une somme de trois carrés. Si $d = 0$, le troisième carré disparaît ; si tous les mineurs de d sont nuls, on a simplement

$$a_{x^2}\, a_{y^2} = a^2_{xy} .$$

Si $d = 0$ sans que ses mineurs soient tous nuls, la formule

précédente fournit les facteurs linéaires dans le produit desquels f se décompose.

Dans le cas général, on voit que (y) et (z) sont arbitraires; α_{xy} est la polaire de (y) ; $\alpha_{(xy)(yz)}$ est la polaire de l'élément commun à α_{xy} & à (yz).

On peut ainsi, et de la façon la plus générale, ramener f à la forme canonique simple

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 .$$

On a alors

$$d = a_{11}a_{22}a_{33} ,$$

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2 .$$

La suite triple de référence, c'est-à-dire l'ensemble formé par les O_i et les Ω_i, est telle que O_i et Ω_i soient pôle et polaire par rapport à f : on dit qu'elle est conjuguée par rapport à f.

Il y a une triple infinité de telles suites, car on peut prendre O_1 arbitrairement, et O_2 arbitrairement sur la polaire de O_1. Si d est nul, f se ramène à la forme

$$f = a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \quad \text{ou} \quad f = a_{11}x_1^2 ,$$

et la signification des éléments de référence est évidente.

103. – Dans certains cas, il y a avantage à choisir une autre forme canonique.

Si la suite O_1, O_2, O_3 est inscrite à f, c'est-à-dire si O_1, O_2 et O_3 appartiennent à f on a :

$$f = 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 ;$$

$$d = 2a_{23}a_{31}a_{12} .$$

$$\varphi = -a_{23}^2\,\xi_1^2 - a_{31}^2\,\xi_2^2 - a_{12}^2\,\xi_3^2 + 2a_{12}a_{13}\,\xi_2\xi_3 + 2a_{23}a_{21}\,\xi_3\xi_1 + 2a_{31}a_{32}\,\xi_1\xi_2\ ;$$

en même temps l'on dit que la suite $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ est circonscrite à φ.

Si la suite O_1, O_2, O_3 est circonscrite à f, et par suite la suite $\Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3$ inscrite à φ, on a de même

$$f = -\alpha_{23}^2\,x_1^2 - \alpha_{31}^2\,x_2^2 - \alpha_{12}^2\,x_3^2 + 2\alpha_{12}\alpha_{13}\,x_2x_3 + 2\alpha_{23}\alpha_{21}\,x_3x_1 + 2\alpha_{31}\alpha_{32}\,x_1x_2,$$

$$d = 4\alpha_{23}^2\alpha_{31}^2\alpha_{12}^2,$$

$$\varphi = 2\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{12}\,(2\alpha_{23}\,\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{31}\,\xi_3\xi_1 + 2\alpha_{12}\,\xi_1\xi_2).$$

Les applications de ces formes simples sont innombrables ; nous ne nous en occuperons pas :

104. – Si (y) est un élément fixe d'une série quadratique f, un élément (yz) a avec f un seul élément commun (x) autre que (y) ; si les coordonnées de (yz) sont de la forme $(\lambda_1\eta + \lambda_2\zeta)$, (η) et (ζ) étant fixes, les coordonnées de (x) sont de la forme

$$x_i = f_i(\lambda_1, \lambda_2),$$

les f_i étant des formes quadratiques par rapport aux (λ). Réciproquement, si l'on a une série dont les éléments sont définis par de telles formules, c'est évidemment une série quadratique, puisqu'elle a deux éléments communs avec une série linéaire quelconque.

A un élément (x) de la série correspond un couple de valeurs des (λ) et réciproquement, sans exception, si l'on suppose que les formes f_i ne sont pas liées par une relation linéaire, ainsi qu'il est facile de le vérifier ; la série est donc un espace à une dimension, rempli par les éléments qui lui appartiennent, et dont les coordonnées binaires sont les (λ). On peut par suite parler du

rapport anharmonique de quatre éléments de la série : c'est le rapport anharmonique des quatre couples de valeurs des (λ) qui leur correspondent ; (y) étant un élément quelconque fixe de f, il est clair que ce rapport est aussi celui des quatre éléments (ξ) définis par (y) et les éléments donnés, puisque ces éléments (ξ) et les éléments de f se correspondent d'une façon doublement univoque, sans exception.

Si (ξ) est tangent à f en (x), on a par un calcul immédiat

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \dfrac{\partial f_3}{\partial \lambda_1}, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

de sorte que les f_i étant du second degré, on peut répéter sur la série tangentielle φ tout ce qui précède. Les deux séries f et φ sont deux espaces homographiques dont les éléments correspondants sont les éléments de f et les éléments tangents à f correspondants. La forme canonique de cette représentation des éléments de f est obtenue en posant

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda_1\lambda_2, & \text{alors} \quad f = (x_1^2 - 4x_2x_3)\sigma \\ x_2 = \lambda_1^2, & \qquad\quad d = -4\sigma^3 \\ x_3 = \lambda_2^2 ; & \qquad\quad \varphi = (-4\xi_1^2 + 4\xi_2\xi_3)\sigma^2. \end{cases}$$

La série f contient O_2 et O_3 et y admet Ω_3 et Ω_2 comme éléments tangents. On a

$$\begin{cases} \xi_1 = -\lambda_1\lambda_2, \\ \xi_2 = \lambda_2^2, \\ \xi_3 = \lambda_1^2. \end{cases}$$

Nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie, dont les applications sont évidentes.

§.2. Le système de 2 formes quadratiques. Étude du faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$.

105.– Envisageons l'ensemble de deux formes quadratiques de même espèce, soit

$$f = a_{x^2}\ ,\quad g = b_{x^2}\ ;$$

si nous adjoignons aux coefficients de ces formes les variables (x) et (ξ), nous aurons d'abord comme invariants les discriminants d et d' de f et de g, les formes f et g elles mêmes, et leurs formes tangentielles

$$\varphi = \alpha_{\xi^2}\ ,\quad \Psi = \beta_{\xi^2}\ ;$$

nous pouvons y joindre la forme (x/ξ).

Considérons maintenant la série quadratique (λ) du faisceau

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0,$$

et de même la série de seconde espèce (μ) du faisceau

$$\mu_1 \varphi + \mu_2 \Psi = 0.$$

Le discriminant de (λ) est

$$\lambda_1^3 d + \lambda_1^2 \lambda_2 e + \lambda_1 \lambda_2^2 e' + \lambda_2^3 d'\ ,$$

où e et e' sont deux invariants définis par

$$e = \alpha_{11} b_{11} + \alpha_{22} b_{22} + \alpha_{33} b_{33} + 2\alpha_{23} b_{23} + 2\alpha_{31} b_{31} + 2\alpha_{12} b_{12}\ ,$$

$$e' = \alpha_{11}\beta_{11} + \dots\dots\dots + 2\,\alpha_{23}\beta_{23} + \dots\dots\dots\ ;$$

ce sont d'ailleurs les polaires de d et d' par rapport aux coefficients

Le discriminant de (μ) est de même

$$\mu_1^3 d^2 + \mu_1^2 \mu_2\, d e' + \mu_1 \mu_2^2\, d' e + \mu_2^3 d'^2.$$

La forme équivalente à (λ) est :

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \Psi,$$

où l'invariant χ est encore une polaire :

$$\chi = b_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} + \ldots + b_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial a_{23}} + \ldots\ldots$$

$$= a_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial b_{11}} + \ldots + a_{23} \frac{\partial \Psi}{\partial b_{23}} + \ldots\ldots$$

$$= (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} - 2 a_{23} b_{23}) \xi_1^2 + \ldots\ldots$$

$$+ 2(a_{12} b_{13} + a_{13} b_{12} - a_{11} b_{23} - a_{23} b_{11}) \xi_2 \xi_3 + \ldots ;$$

de même, la forme équivalente à (μ) est :

$$\mu_1^2 df + \mu_1 \mu_2 h + \mu_2^2 d'g,$$

avec :

$$h = \beta_{11} \frac{\partial (df)}{\partial \alpha_{11}} + \ldots + \beta_{23} \frac{\partial (df)}{\partial \alpha_{23}} + \ldots\ldots$$

$$= \alpha_{11} \frac{\partial (dg)}{\partial \beta_{11}} + \ldots + \alpha_{23} \frac{\partial (dg)}{\partial \beta_{23}} + \ldots\ldots$$

$$= (\alpha_{22} \beta_{33} + \alpha_{33} \beta_{22} - 2 \alpha_{23} \beta_{23}) x_1^2 + \ldots\ldots$$

$$+ 2(\alpha_{12} \beta_{13} + \alpha_{13} \beta_{12} - \alpha_{11} \beta_{23} - \alpha_{23} \beta_{11}) x_2 x_3 + \ldots ;$$

$f, g, h, \varphi, \Psi, \chi, d, e, e', d'$ forment un système d'invariants indépendants.

On remarquera la dualité qui existe entre les formes de ce système ; en les remplaçant par $\varphi, \Psi, dd'\chi, df, dg', h, d^2, e'd, ed', d'^2$, on obtiendrait les formes correspondantes relatives à l'ensemble (φ, Ψ), f et g restant données.

106. – Nous allons chercher tout de suite une forme canonique

simultanée pour f et g. A cet effet, cherchons les éléments (x) qui ont même polaire par rapport à f et g ; on doit avoir :

$$\frac{f_{x_1}}{g_{x_1}} = \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}} = \frac{f_{x_3}}{g_{x_3}}.$$

Si $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est la valeur commune de ces rapports, ces équations signifient que le discriminant de $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est nul, et par suite on a l'équation

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11} & \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 b_{12} & \lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 b_{13} & \lambda_1 a_{23} + \lambda_2 b_{23} & \lambda_1 a_{33} + \lambda_2 a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1^3 d + \lambda_1^2 \lambda_2 e + \lambda_1 \lambda_2^2 e' + \lambda_2^3 d' = 0.$$

Les éléments cherchés sont par suite en même temps les éléments multiples du faisceau (f, g), c'est-à-dire les éléments multiples des séries de ce faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, qui se décomposent.

Si une racine (λ) de $\Lambda = 0$ n'annule pas tous les mineurs du déterminant Λ, ce qui arrive nécessairement si cette racine est simple, à cette racine correspond une solution unique (x) : la série correspondante $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$ admet cet élément double unique.

Si une racine (λ) annule tous les mineurs de Λ, et alors elle est double ou triple, il lui correspond une infinité simple d'éléments (x) remplissant un élément de seconde espèce que représente deux fois l'équation $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$.

Si f et g sont des formes distinctes, les éléments de Λ ne peuvent être tous nuls.

Si (λ), (λ') sont deux racines distinctes de Λ, auxquelles correspondent des solutions (x) et (x') nécessairement distinctes, on a :

$$\lambda_1 f_{x_i} + \lambda_2 g_{x_i} = 0, \quad \lambda'_1 f_{x'_i} + \lambda'_2 g_{x'_i} = 0,$$

d'où

$$\lambda_1 \Sigma x'_i f_{x_i} + \lambda_2 \Sigma x'_i g_{x_i} = 0, \quad \lambda'_1 \Sigma x_i f_{x'_i} + \lambda'_2 \Sigma x_i g_{x'_i} = 0,$$

et par suite puisque $(\lambda \lambda') \neq 0$,

$$\Sigma x_i f_{x'_i} = \Sigma x'_i f_{x_i} = 0, \Sigma x_i g_{x'_i} = \Sigma x'_i g_{x_i} = 0;$$

donc (x) et (x') sont conjugués par rapport à f et g.

Si Λ est nul identiquement, d et d' sont nuls; f et g sont décomposables; on peut prendre f sous l'une des formes $2a_{23}x_2x_3$ ou $a_{11}x_1^2$; on vérifiera que g représente alors deux éléments de seconde espèce dont l'un est commun avec ceux que représente f, ou bien qui ont en commun un élément multiple de f. Toutes les séries du faisceau (f,g) sont décomposables.

107. — Le cas de Λ nul identiquement étant laissé de côté, le faisceau (f,g) contient au plus trois séries décomposables qui n'ont pas d'élément double commun.

Supposons:

1° Qu'une série décomposable (λ) représente deux éléments (ξ) distincts. En choisissant les coordonnées de façon que cette série soit $2x_2x_3 = 0$, l'étude de Λ montre immédiatement que si la racine (λ) est simple, la solution correspondante (x), qui est ici 0_1, n'appartient à aucune série du faisceau (f,g) autre que (λ); si la racine (λ) est double, 0_1 appartient à toutes les séries du faisceau, qui y sont tangentes à un même élément (ξ) d'après les propriétés des polaires; cet élément coïncide avec $x_2 = 0$ ou $x_3 = 0$ si (λ) est racine triple, et seulement alors.

2° qu'une série décomposable (λ) représente une série

linéaire double ; son équation peut alors être prise sous la forme $x_1^2 = 0$. On voit ici que $x_1 = 0$ a en commun avec toutes les séries du faisceau deux éléments distincts A et B, si (λ) n'est pas triple ; les séries sont tangentes en A et B et leurs éléments tangents communs sont distincts de $x_1 = 0$. Si la racine (λ) est triple, $x_1 = 0$ est tangent à toutes les séries du faisceau en un même élément A.

108. - Examinons maintenant les divers cas qui peuvent se présenter.

I. L'équation $\Lambda = 0$ a trois racines simples.

A ces racines correspondent trois éléments (x) distincts, qui ne sauraient appartenir à un même faisceau linéaire, d'après leurs propriétés, et qui forment une suite triple conjuguée à la fois par rapport à f et g ; il n'y a d'ailleurs pas d'autre telle suite. En la prenant pour O_1 O_2 O_3, on a les formes canoniques

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 ,$$

$$g = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 ,$$

et les trois déterminants $a_{ii} b_{jj} - a_{jj} b_{ii}$ sont différents de zéro.

II. L'équation $\Lambda = 0$ a une racine simple, et une racine double qui n'annule pas les mineurs de Λ.

C'est un cas limite du précédent.

Si O_1 correspond à la racine double et O_2 à la racine simple les séries sont tangentes en O_1 à O_1O_2 d'après les propriétés données plus haut. La polaire de O_2 contient O_1 ; plaçons y aussi O_3. Alors, on a les formes canoniques :

$$f = a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{13} x_1 x_3 ;$$
$$g = b_{22} \lambda_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2b_{13} x_1 x_3 ,$$

on a de plus $a_{22} b_{13} - a_{13} b_{22} \neq 0$, $a_{33} b_{13} - a_{13} b_{33} \neq 0$.

III. – L'équation $\Lambda = 0$ a une racine triple qui n'annule pas les mineurs de Λ.

C'est un cas limite du précédent.

Si O_1 correspond à la racine triple, les séries y sont tangentes à Ω_3 par exemple. On a

$$f = a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{13} x_1 x_3 ,$$
$$g = b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2b_{23} x_2 x_3 + 2b_{13} x_1 x_3 ,$$

avec

$$a_{13} b_{22} - a_{22} b_{13} = 0 , \quad a_{22} b_{23} - a_{23} b_{22} \neq 0 ,$$
$$a_{13} b_{23} - a_{23} b_{13} \neq 0 .$$

O_1 est commun trois fois à f et à g ; f et g ont un quatrième élément commun que l'on peut prendre pour O_3 ; alors $a_{33} = b_{33} = 0$.

IV. – L'équation $\Lambda = 0$ a une racine simple et une racine double qui annule les mineurs de Λ.

A la racine simple correspond par exemple O_1 ; à la racine double correspondent tous les éléments de Ω_1, polaire de O_1, par suite. Si O_2 et O_3 sont conjugués harmoniques par rapport aux deux éléments A & B communs à Ω_1 et à f et g, la suite triple $O_1\ O_2\ O_3$ est conjuguée par rapport à f et g ; on a donc d'une infinité simple de manières

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 ,$$
$$g = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 ,$$

avec

$$a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22} = 0 , \quad a_{22} b_{11} - a_{11} b_{22} \neq 0 , \quad a_{11} b_{33} - a_{33} b_{11} \neq 0 .$$

V. L'équation $\Delta = 0$ a une racine triple qui annule les mineurs de Δ.

A cette racine correspondent tous les éléments de Ω_3; les séries du faisceau se touchent en O_1; si O_2 est quelconque sur Ω_3, et si Ω_2 est la polaire commune de O_2, on a:

$$f = a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + 2 a_{13}\, x_1 x_3 ,$$

$$g = b_{22}\, x_2^2 + b_{33}\, x_3^2 + 2 b_{13}\, x_1 x_3 ,$$

avec

$$a_{22} b_{13} - a_{13} b_{22} = 0, \quad a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22} \neq 0, \quad a_{13} b_{33} - a_{33} b_{13} \neq 0.$$

109. - L'analyse qui précède nous fournit d'abord la réduction de f et g à des formes canoniques, en particulier à des sommes de carrés lorsque cela est possible. Elle nous fournit aussi les éléments (x) qui ont même polaire par rapport à toutes les séries du faisceau, et par suite les éléments (ξ) qui ont même pôle par rapport à ces séries; les suites triples conjuguées par rapport à ces séries; les séries décomposables du faisceau ainsi que leurs éléments multiples. Enfin elle nous fournit la disposition des éléments communs à deux séries quelconques du faisceau, qui sont les éléments communs à f et à g. On voit tout de suite en effet que si l'on suppose f et g indécomposables: dans le cas I, deux séries (λ) du faisceau ont en commun quatre éléments distincts qui, inversement, déterminent le faisceau; dans le cas II, deux séries λ se touchent en O_1, qui leur est commun deux fois, et ont deux autres éléments communs distincts, qui avec O_1 et l'élément tangent commun Ω_3 en O_1 déterminent le faisceau;

dans le cas III, deux séries du faisceau sont osculatrices, c'est-à-dire ont en commun trois fois l'élément O, où elles se touchent suivant Ω_3, et un autre élément; dans le cas IV, deux séries du faisceau sont bitangentes, c'est-à-dire ont en commun deux fois deux éléments communs A et B, en lesquels elles se touchent suivant deux éléments qui avec A et B déterminent le faisceau;
dans le cas V, deux séries (λ) sont surosculatrices, c'est-à-dire ont en commun quatre fois l'élément O_1, où elles sont tangentes.

Il est facile d'écrire les conditions qui expriment que l'on se trouve dans un cas particulier donné.

Les séries f et g sont simplement tangentes, si l'équation $\Lambda = 0$ a une racine double, ce qui donne

$$27 d^2 d'^2 - 18 d d' e e' - e^2 e'^2 + 4 d e'^3 + 4 d' e^3 = 0.$$

Les séries f et g sont osculatrices si $\Lambda = 0$ a une racine triple, c'est-à-dire si le hessien de la forme binaire Λ par rapport aux (λ) est nul identiquement, ce qui donne

$$\frac{3d}{e} = \frac{e}{e'} = \frac{e'}{3d'}.$$

Si les séries f et g sont bitangentes, et si (λ) est la racine double de $\Lambda = 0$, la forme équivalente à $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ est nulle identiquement: on a donc:

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 X + \lambda_2^2 \Psi = 0;$$

les dérivées partielles de Λ sont nulles aussi; alors éliminant linéairement

$$\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2 \text{ et } \lambda_2^2,$$

on a

$$(a) \quad \begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ 3d & 2e & e' \\ e & 2e' & 3d' \end{vmatrix} = 0;$$

cette condition nécessaire est suffisante aussi, comme le montrerons plus loin, si les conditions d'osculation ne sont pas vérifiées.

Si les séries f et g sont surosculatrices, on a comme plus haut, pour la racine triple de $\Lambda = 0$,

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \psi = 0;$$

de plus, les dérivées partielles du second ordre de Λ sont nulles, et par suite

$$3d\lambda_1 + e\lambda_2 = 0, \; e\lambda_1 + e'\lambda_2 = 0, \; e'\lambda_1 + 3d'\lambda_2 = 0.$$

On en déduit en particulier les deux relations équivalentes:

$$(b) \quad \begin{aligned} & e'\varphi - e\chi + 3d\psi = 0, \\ & 3d'\varphi - e'\chi + e\psi = 0; \end{aligned}$$

ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, quand on les joint aux conditions d'osculation, comme nous le verrons plus loin.

Il est inutile d'insister sur les cas où l'une des séries f ou g serait décomposable : les modifications à faire dans les différents cas sont évidentes. Il en est de même si f et g sont décomposables toutes deux.

110. - Tout ce qui précède peut être répété sur les séries φ et ψ et le faisceau $\mu_1\varphi + \mu_2\psi$, différent du faisceau $\lambda_1 f + \lambda_2 g$.

On obtiendra la forme canonique de φ et ψ ; les éléments qui ont même polaire ou même pôle par rapport à φ et ψ; etc. Si en particulier les séries f et g sont indécomposables, de sorte

qu'il en est de même de φ et ψ, les éléments qui ont même polaire ou même pôle par rapport à φ et ψ, sont les éléments déjà trouvés, qui ont un même pôle ou même polaire par rapport à f et g; les suites triples conjuguées par rapport à φ et ψ résultent des suites analogues relatives à f et g; les éléments communs à φ et ψ sont les éléments tangents communs à f et g; les séries décomposables du faisceau (φ, ψ) sont formées des éléments communs aux éléments tangents communs à f et g, associés deux à deux, et ces éléments sont situés, en général, sur les éléments Ω_i de la suite triple conjuguée par rapport à φ et ψ; etc.

Ces résultats, réciproques des précédents, n'ont rien de surprenant, si l'on remarque que l'équation $M=0$, obtenue en égalant à zéro le discriminant de $\mu_1\varphi+\mu_2\psi$, se réduit à l'équation $\Lambda=0$ par la substitution

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=\frac{d'\lambda_2}{d\lambda_1};$$

alors les différents cas possibles sont les mêmes qu'au No. 108.

Dans le cas I, avec les notations précédentes, les formes canoniques sont

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 + a_{33}a_{11}\xi_2^2 + a_{11}a_{22}\xi_3^2,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\xi_1^2 + b_{33}b_{11}\xi_2^2 + b_{11}b_{22}\xi_3^2;$$

f et g ont en commun quatre éléments tangents distincts.

Dans le cas II on a:

$$\varphi = a_{22}a_{33}\xi_1^2 - a_{13}^2\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\xi_1\xi_3,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\xi_1^2 - b_{13}^2\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\xi_1\xi_3;$$

f et g ont en commun deux éléments tangents simples, et en outre Ω_3 deux fois.

Dans le cas III on a :

$$\varphi = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)\,\xi_1^2 - a_{13}^2\,\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\,\xi_1\xi_3 + 2a_{11}a_{23}\,\xi_1\xi_2\,,$$
$$\psi = (b_{22}b_{33} - b_{23}^2)\,\xi_1^2 - b_{13}^2\,\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\,\xi_1\xi_3 + 2b_{13}b_{23}\,\xi_1\xi_2\,;$$

Ω_3 est un élément tangent commun trois fois à f et g, qui en ont encore un autre.

Dans le cas IV, on peut écrire φ et ψ comme dans le cas I, avec les conditions énoncées au N.º 108 ; f et g ont deux éléments tangents communs, comptant chacun deux fois.

Enfin, dans le cas V, on a

$$\varphi = a_{22}a_{33}\,\xi_1^2 - a_{13}^2\,\xi_2^2 - 2a_{22}a_{13}\,\xi_1\xi_3\,,$$
$$\psi = b_{22}b_{33}\,\xi_1^2 - b_{13}^2\,\xi_2^2 - 2b_{22}b_{13}\,\xi_1\xi_3\,;$$

Ω_3 est un élément tangent commun quatre fois à f et g.

Les conditions caractéristiques des divers cas s'expriment comme au numéro précédent ; dans les cas IV et V elles deviendront :

$$\begin{vmatrix} f & h & g \\ 3d & 2de' & e \\ e' & 2d'e & 3d' \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{cases} d'ef - e'h + 3dd'g = 0, \\ 3dd'f - eh + de'g = 0. \end{cases}$$

111. – Les séries décomposables du faisceau (f, g) correspondant aux racines de l'équation $\Lambda = 0$, l'équation des éléments qui représentent ces séries, c'est-à-dire des six éléments de seconde

espèce qui contiennent les éléments communs à f et g deux à deux, est évidemment

$$d'f^3 - c'f^2 g + e f g^2 - d g^3 = 0.$$

Il est d'ailleurs évident sur les formes canoniques que les éléments (ξ) représentés par l'une de ces séries décomposables, ont en commun un élément O_i, et sont conjugués harmoniques par rapport aux deux éléments Ω_j qui contiennent O_i; cette proposition qui s'applique au cas I est facile à modifier dans les cas particuliers.

La même chose peut se répéter sur les éléments représentés par les séries décomposables du faisceau (φ, ψ); en particulier, ils ont pour équation:

$$d'^2 \varphi^3 - e d' \varphi^2 \psi + e' d \varphi \psi^2 - d^2 \psi^3 = 0.$$

Les séries du faisceau (f, g) ont pour forme équivalente:

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \psi = 0 ;$$

donc il y en a deux qui touchent un élément (ξ) donné; ces deux séries sont confondues si (ξ) vérifie l'équation

$$\varphi \psi - 4 \chi^2 = 0 ;$$

d'ailleurs, il en est ainsi évidemment si (ξ) contient un des éléments communs à f et g; donc l'équation du quatrième degré que nous venons d'obtenir est celle des quatre éléments communs à f et à g. Nous retrouverons ce résultat plus loin.

De même l'équation des éléments communs à φ et ψ, c'est-à-dire des éléments tangents communs à f et g, est

$$4 d d' f g - h^2 = 0.$$

112. — On peut envisager les deux invariants qui sont les jacobiens des formes f, g, h & φ, Ψ, χ.

En se servant des formes canoniques générales du cas I, on a

$$h = a_{11} b_{11} (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22}) x_1^2 + \dots,$$

$$\chi = (a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22}) \xi_1^2 + \dots;$$

le jacobien τ de f, g, h, est donc :

$$\tau = x_1 x_2 x_3 (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22})(a_{33} b_{11} - a_{11} b_{33})(a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11});$$

le jacobien ρ de φ, Ψ, χ est :

$$\rho = \xi_1 \xi_2 \xi_3 (a_{22} b_{33} - a_{33} b_{22})(a_{33} b_{11} - a_{11} b_{33})(a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11}).$$

On voit que $\tau = 0$ représente les éléments O_i de la suite triple conjuguée par rapport à f et g ; on a une proposition analogue pour ρ.

τ et ρ sont liés par des relations aux invariants employés jusqu'à présent. Si (λ) est racine de $\Lambda = 0$, la forme

$$\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \Psi$$

est un carré parfait et représente deux fois l'un des éléments O_i, d'après ce qu'on a dit antérieurement : ρ^2 ne diffère donc que par un facteur constant du produit

$$\Pi (\lambda_1^2 \varphi + \lambda_1 \lambda_2 \chi + \lambda_2^2 \Psi)$$

étendu aux trois racines de $\Lambda = 0$. On trouvera alors sans peine

$$\begin{aligned} -\rho^2 = {} & \varphi^3 d'^2 + \varphi^2 \Psi (e'^2 - 2ed') + \varphi \Psi^2 (e^2 - 2e'd) + \Psi^3 d^2 \\ & - e'd' \varphi^2 \chi + (3dd' - ee') \varphi \Psi \chi - ed \Psi^2 \chi + ed' \varphi \chi^2 \\ & + e'd \Psi \chi^2 - dd' \chi^3. \end{aligned}$$

Un…

Un raisonnement analogue conduit à

$$-\iota^2 = f^3 d d'^2 + f^2 g d'(e^2 - 2e'd) + f g^2 d (e'^2 - 2ed') + g^3 d^2 d' - f^2 h e d' + f g h (3dd' - ee') - g^2 h e' d + f h^2 e' + g h^2 e - h^3.$$

Les cas particuliers sont faciles à étudier.

Dans les cas IV et V, et dans ces cas seulement, r et ρ sont nuls identiquement, en outre dans le cas V les conditions d'osculation sont vérifiées. Comme les relations (a) et (b) qui expriment une relation entre φ, Ψ et χ entraînent l'évanouissement identique de ρ, on voit bien que les propositions énoncées à la fin du N.° 109 sont exactes.

113. – Nous indiquerons comme exercice la formation des invariants relatifs à deux séries quelconques du faisceau (f, g) ou du faisceau (φ, Ψ). De même on pourra étudier les faisceaux tels que (f, h); nous remarquerons seulement que h est réduite à la forme canonique générale en même temps que f et g, c'est-à-dire que la suite triple conjuguée par rapport à f et g est aussi conjuguée par rapport à h.

Enfin, citons les propriétés suivantes d'un faisceau tel que (f, g). Si (ξ) est un élément de seconde espèce défini par (y) et (z), et si (x) appartient à (ξ), de sorte que ses coordonnées soient $(\rho_1 y + \rho_2 z)$, (x) appartiendra à $\lambda_1 f + \lambda_2 g = 0$, si l'on a :

$$\lambda_1 (\rho_1^2 a_{y^2} + 2\rho_1\rho_2 a_{yz} + \rho_2^2 a_{z^2}) + \lambda_2 (\rho_1^2 b_{y^2} + 2\rho_1\rho_2 b_{yz} + \rho_2^2 b_{z^2}) = 0;$$

les séries (λ) déterminent donc par leurs éléments communs avec (ξ) une involution dans l'espace (ξ); les éléments doubles de

cette involution sont évidemment les éléments de contact des deux séries (λ) qui touchent (ξ). L'involution n'est singulière que si ces éléments sont confondus, c'est-à-dire si (ξ) contient un élément commun à f et g.

114. – Pour terminer ce paragraphe, nous indiquerons comment, dans le cas général où l'équation $\Lambda = 0$ a trois racines distinctes, on peut réduire les formes f et g aux formes canoniques du cas I :

$$f = a'_{11}\, x'^2_1 + a'_{22}\, x'^2_2 + a'_{33}\, x'^2_3 \quad ,$$
$$g = b'_{11}\, x'^2_1 + b'_{22}\, x'^2_2 + b'_{33}\, x'^2_3 \quad .$$

Soit

$$\Lambda = \Pi(\lambda_1 \lambda_2^{(i)} - \lambda_2 \lambda_1^{(i)}) \qquad (i = 1,2,3).$$

Faisons correspondre la racine $\lambda^{(i)}$ à l'élément de référence O'_i; alors la forme équivalente à

$$d' \lambda_2^{(i)} \varphi + d\, \lambda_1^{(i)} \Psi = 0,$$

soit

$$d'(\lambda_2^{(i)})^2 f + \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} h + d(\lambda_1^{(i)})^2 g = \sigma,$$

représente deux fois Ω'_i.

En faisant $h = c_{x^2}$, et désignant par (y) un élément quelconque, on peut donc en prenant la polaire, écrire

$$x'_i = d'(\lambda_2^{(i)})^2 a_{xy} + \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} c_{xy} + d(\lambda_1^{(i)})^2 b_{xy}.$$

Le déterminant de la substitution ainsi définie pour passer des (x') aux (x) est :

$$\delta = d\,d'(\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(3)} - \lambda_1^{(3)}\lambda_2^{(2)})(\lambda_1^{(3)}\lambda_2^{(1)} - \lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(3)})(\lambda_1^{(1)}\lambda_2^{(2)} - \lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)})\, r(y),$$

d'après la définition de r comme jacobien.

Les rapports $\frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}}$ sont des invariants absolus évidemment, et l'on a

$$\frac{b'_{ii}}{a'_{ii}} = -\frac{\lambda_1^{(i)}}{\lambda_2^{(i)}}.$$

Par les propriétés des invariants, en faisant les (x) égaux aux (y), en appelant (y') les transformés de (y), on a :

$$a'_{11} y_1'^2 + a'_{22} y_2'^2 + a'_{33} y_3'^2 = a_{y^2} ;$$

$$\frac{-\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} a'_{11} y_1'^2 - \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} a'_{22} y_2'^2 - \frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}} a'_{33} y_3'^2 = b_{y^2} ,$$

$$a'_{11}\, a'_{22}\, a'_{33} = \frac{d}{\delta^2} ;$$

puis en se servant de h et des relations précédentes :

$$\frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} \left(\frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} + \frac{\lambda_1^{(3)}}{\lambda_2^{(3)}} \right) a'_{11} y_1'^2 + \ldots = \frac{c_{y^2}}{d} ;$$

on en tire linéairement les inconnues :

$$a'_{ii} = -\frac{1}{\lambda_1^{(i)} y'_i \left(\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(j)} - \lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(i)} \right) \left(\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(k)} - \lambda_1^{(k)} \lambda_2^{(i)} \right)} ,$$

les indices i, j, k étant différents.

On en déduit

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g = -\sum \frac{\left(\lambda_1 \lambda_2^{(i)} - \lambda_2 \lambda_1^{(i)} \right) x_i'^2}{y'_i \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} \left(\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(j)} - \lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(i)} \right) \left(\lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(k)} - \lambda_1^{(k)} \lambda_2^{(i)} \right)} .$$

Si on fait les (y) égaux aux (x) au second membre, $\frac{x_i'^2}{y'_i}$ se réduit à x'_i, qui est le carré parfait

$$d' (\lambda_2^{(i)})^2 a_{x^2} + \lambda_1^{(i)} \lambda_2^{(i)} c_{x^2} + d (\lambda_1^{(i)})^2 b_{x^2} ,$$

d'après ce qui précède ; on a ainsi décomposé $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ en une somme de carrés ; mais les nouvelles variables ne sont pas en évidence.

§ 3. Les invariants h & X

115. — Soit (ξ) un élément de seconde espèce déterminé par (y) et (z); un élément $(\lambda_1 y + \lambda_2 z)$ appartient à f ou à g si l'on a:

$$\lambda_1^2 a_{y^2} + 2\lambda_1\lambda_2 a_{yz} + \lambda_2^2 a_{z^2} = 0,$$

ou bien

$$\lambda_1^2 b_{y^2} + 2\lambda_1\lambda_2 b_{yz} + \lambda_2^2 b_{z^2} = 0.$$

Si donc k est l'un des deux rapports anharmoniques déterminés par les éléments communs à f et (ξ) avec les éléments communs à g et (ξ), on a:

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{(a_{y^2} b_{z^2} - 2a_{yz} b_{yz} + a_{z^2} b_{y^2})^2}{4(a_{y^2} a_{z^2} - a_{yz}^2)(b_{y^2} b_{z^2} - b_{yz}^2)};$$

On a d'ailleurs

$$a_{y^2} a_{z^2} - a_{yz}^2 = \alpha_{\xi^2} = \varphi, \quad b_{y^2} b_{z^2} - b_{yz}^2 = B_{\xi^2} = \Psi,$$

et d'après la définition de X comme polaire:

$$a_{y^2} b_{z^2} - 2a_{yz} b_{yz} + a_{z^2} b_{y^2} = \Upsilon_{\xi^2} = X;$$

donc

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{X^2}{4\varphi\Psi}.$$

Cette équation définit la série des éléments (ξ) tels que k ait une valeur donnée: c'est en général une série biquadratique tangente à φ et à Ψ suivant les éléments communs à ces séries et à X.

Pour $k=0$ ou $k=\infty$, on retrouve l'équation $4\varphi\Psi - X^2 = 0$ des éléments communs à f et à g.

Pour $k=-1$, on a $X=0$; $X=0$ définit donc la série des éléments (ξ) tels que les éléments communs à (ξ) et à f et g forment deux couples conjugués harmoniques.

D'après cela, il est clair que les éléments communs à φ et à X par exemple, sont les éléments tangents à f suivant les éléments communs à f et g.

On trouvera de même que si k est le rapport anharmonique des éléments communs à (x) et φ associés aux éléments communs à (x) et ψ, on a

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = \frac{h^2}{4dd'fg}.$$

$4dd'fg - h^2 = 0$ est donc l'équation des éléments tangents communs à f et à g. $h=0$ est la série des éléments (x) tels que les éléments tangents à f et g menés par (x) forment deux couples conjugués harmoniques.

Les éléments communs à f et h sont par suite les éléments de contact sur f des éléments communs communs à f et g.

Si g se décompose et représente deux éléments (ξ) distincts ayant (x) en commun, $h=0$ représente les éléments tangents à f menés par (x).

Si g représente un élément (ξ) double, h est nul identiquement ; $X=0$ représente les éléments communs à f et à (ξ)

116. – A l'aide des formes canoniques de h et ψ données plus haut, on trouvera sans peine le discriminant d_1 de h ; c'est $dd'(ee'-dd')$; de même le discriminant de X est $ee'-dd'$. Si d et d' ne sont pas nuls, h et X se décomposent en même temps. En calculant les invariants de f et h, on trouvera sans peine que les éléments communs à f et h, définis précédemment, ont pour équation.

$$(4ed'-e'^2)\varphi^2+2e'd\varphi\psi-d^2\psi^2-4dd'\varphi\chi=0;$$

l'équation des séries décomposables du faisceau (f,h) sera

$$d'(ee'-dd')f^3-(ed'+e'^2)f^2h+2e'fh^2-h^3=0;$$

on peut multiplier les exercices de ce genre, qui seraient faciles à traduire en langage géométrique ordinaire. On a des résultats tout semblables pour les systèmes tels que (φ,χ).

Ajoutons, sans insister sur ce cas, que si h et χ se décomposent, c'est-à-dire si l'on a $ee'-dd'=0$, les séries f et g jouissent de toutes les propriétés projectives d'un système de deux cercles orthogonaux dans le plan.

---

§.4. Les invariants e & e'.

117. – Quelle est la série définie par les polaires (ξ) par rapport à f des différents éléments (x) de g? Un calcul simple, fait sur les formes canoniques générales, conduit pour cette série à l'équation

$$e\varphi-d\chi=0.$$

La polaire (ξ) peut-elle déterminer sur (g) deux éléments (y) et (z) conjugués par rapport à f? Ceci exige que l'on ait $\chi=0$, d'après les propriétés de la série χ : Si donc e n'est pas nul, on a aussi $\varphi=0$, et les éléments (ξ) considérés sont les éléments tangents à f suivant les éléments communs à f et à g. De là résulte qu'il n'existe pas de suite triple $0_1 0_2 0_3$ proprement dite conjuguée par rapport à f et inscrite à g.

Mais si l'on a $e=0$, on a $\chi=0$, quel que soit (x); donc

il existe alors une infinité simple de suites triples $O_1 O_2 O_3$, conjuguées par rapport à f et inscrites à g ; chaque élément de g détermine l'une d'elles.

On a ainsi la signification géométrique de la condition $e = 0$.

La condition $e' = 0$ aura une signification analogue, les rôles de f et g étant renversés.

Considérons maintenant un élément (Ξ) de Ψ et cherchons la série de ses pôles par rapport à f ; on trouve l'équation

$$e' f - h = 0.$$

Cette série de première espèce a précisément pour série tangentielle la série de seconde espèce trouvée plus haut,

$$e \varphi - d X = 0 ;$$

car en remplaçant un élément quelconque par sa polaire ou son pôle par rapport à f, on ne fait qu'exécuter une transformation homographique sur les éléments de l'espace, les nouveaux éléments remplissant le même espace, mais étant d'espèce opposée.

On peut répéter ce qui a été dit plus haut. Si e' n'est pas nul, il n'y a aucune suite triple $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$, proprement dite, conjuguée par rapport à f et circonscrite à g ; si $e' = 0$, il y a une infinité simple de telles suites. On a ainsi une nouvelle interprétation de la condition $e' = 0$.

La condition $e = 0$ a une signification analogue.

La double interprétation de $e = 0$ résulte immédiatement de la dualité déjà signalée entre les invariants des systèmes (f, g) et (φ, Ψ)

118. Ce qui précède se modifie dans les cas particuliers, où les quantités d et d' ne sont plus toutes deux supposées non nulles.

Supposons que

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$$

ce qui est toujours possible, g étant quelconque ; alors

$$e = a_{22} a_{33} b_{11} + a_{33} a_{11} b_{22} + a_{11} a_{22} b_{33}.$$

Si f est carré parfait, e est nul.

Si f est décomposable sans être carré parfait, soit $a_{11} = 0$ et $a_{22} a_{33} \neq 0$; alors e s'annule en même temps que b_{11}. $e = 0$ signifie donc que l'élément multiple de f appartient à g.

On a aussi

$$e' = a_{11} B_{11} + a_{22} B_{22} + a_{33} B_{33}.$$

Si f est carré parfait de sorte que $a_{22} = a_{33} = 0$, e' s'annule avec B_{11} ; donc $e' = 0$ signifie que l'élément (ξ) que représente deux fois $f = 0$, est tangent à g.

Si f est décomposable sans être carré parfait, comme plus haut on verra sans peine que $e' = 0$ exprime que les éléments représentés par $f = 0$ sont conjugués par rapport à g.

La même méthode pourrait être employée pour retrouver les résultats du N° précédent dans le cas général.

119. - Par un élément (x) de f on mène les deux éléments tangents à g ; leurs éléments communs avec f autres que (x) sont (y) et (z) ; quelle est la série des éléments (yz) ou (ξ) ? Employons les formes canoniques, et soient (X) les coordonnées courantes : la série f, la série formée par (xy) et (xz), la série formée par (ξ) et l'élément tangent à f en (x) appartiennent à un même faisceau. Leurs équations sont

$$a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{33} X_3^2 = 0,$$

$$b_{22} b_{33} (x_3 X_2 - x_2 X_3)^2 + b_{33} b_{11} (x_1 X_3 - x_3 X_1)^2 + b_{11} b_{22} (x_2 X_1 - x_1 X_2)^2 = 0,$$

$$(\xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_3 X_3)(a_1 x_1 X_1 + a_{22} x_2 X_2 + a_{33} x_3 X_3) = 0,$$

avec la condition $\qquad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2$.

On a donc en particulier

$$\frac{b_{22} b_{33} x_2 x_3}{a_{22} x_2 \xi_3 + a_{33} x_3 \xi_2} = \frac{b_{33} b_{11} x_3 x_1}{a_{33} x_3 \xi_1 + a_{11} x_1 \xi_3} = \frac{b_{11} b_{22} x_1 x_2}{a_{11} x_1 \xi_2 + a_{22} x_2 \xi_1},$$

et par suite, pour la série cherchée

$$\frac{\xi_1^2}{a_{11} [-a_{11} b_{22} b_{33} + a_{22} b_{33} b_{11} + a_{33} b_{11} b_{22}]^2} + \cdots = 0,$$

ou bien, en passant en coordonnées (x),

$$a_{11} (-a_{11} b_{22} b_{33} + a_{22} b_{33} b_{11} + a_{33} b_{11} b_{22})^2 x_1^2 + \ldots = 0;$$

ou enfin

$$f(e'^2 - 4ed') + 4dd'g = 0.$$

L'élément (ξ) sera tangent à g, si $e'^2 - 4ed'$ n'est pas nul, lorsque (ξ) sera un des quatre éléments tangents communs à la série précédente, qui appartient au faisceau (f, g), et à g. Si l'on prend pour (x) un des quatre éléments de contact avec f des éléments tangents communs à f et g, (y) par exemple est confondu avec (x) et (yz) est tangent à g : on a ainsi obtenu les quatre solutions précédentes, et par suite il n'existe pas de suite triple proprement dite $O_1 O_2 O_3$, $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$, qui soit à la fois inscrite à f et circonscrite à g. Si au contraire $e'^2 - 4ed' = 0$, tous les éléments (ξ) sont tangents à g, et il existe une infinité simple de telles suites; chaque élément de f détermine l'une d'elles.

On a ainsi la signification géométrique de la condition $e'^2 - 4ed' = 0$; on pourrait d'ailleurs la retrouver directement sans peine, en raisonnant comme au N° 118.

Les cas particuliers de cette condition sont faciles à discuter : si $d' = 0$, on a $e' = 0$, et il suffit de se reporter au N° 118. Si $d = 0$, $e'^2 - 4ed' = 0$ exprime que l'un des éléments (ξ) représenté par $f = 0$ est tangent à g.

120. – Le système (f, g) admet deux invariants absolus géométriques proprement dits, par exemple $\frac{e^2}{e'd}$ et $\frac{e'^2}{ed'}$.

Ils figurent dans diverses questions analogues à celle que nous allons résoudre comme exemple.

Les quatre éléments communs à f et g ont, quand on les considère comme appartenant à f, un certain rapport anharmonique qu'il s'agit de déterminer. (103).

Prenons f sous la forme

$$f = \sigma(x_1^2 - 4x_2x_3),$$

de sorte que $x_1 = 2\lambda_1\lambda_2$, $x_2 = \lambda_1^2$, $x_3 = \lambda_2^2$.

Si g reste quelconque, on a alors

$$d = -4\sigma^3, \quad e = \sigma^2(4b_{23} - 4b_{11}),$$

$$e' = \sigma(b_{22}b_{33} - b_{23}^2 - 4b_{12}b_{13} + 4b_{11}b_{23}),$$

$$d' = b_{11}b_{22}b_{33} + 2b_{23}b_{31}b_{12} - b_{11}b_{23}^2 - b_{22}b_{31}^2 - b_{33}b_{12}^2.$$

Les éléments communs à f et à g sont définis par :

$$b_{22}\lambda_1^4 + 4b_{12}\lambda_1^3\lambda_2 + (4b_{11} + 2b_{23})\lambda_1^2\lambda_2^2 + 4b_{13}\lambda_1\lambda_2^3 + b_{33}\lambda_2^4 = 0.$$

Si i et j sont les invariants de cette forme biquadratique binaire et si $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est l'un des rapports anharmoniques cherchés, on a (58)

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{27\,j^2} = \frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3}{i^3} = \frac{27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2}{i^3-27\,j^2}.$$

On trouve ici
$$i = \frac{1}{12\sigma^4}(e^2 - 3de'),$$
$$j = \frac{1}{216\sigma^6}\left(e^3 - \frac{9}{2}\,dee' + \frac{27}{2}\,d^2d'\right);$$

donc l'équation cherchée est :

$$\frac{(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1-2\rho_2)^2(\rho_2-2\rho_1)^2}{(e^3-\frac{9}{2}dee'+\frac{27}{2}d^2d')^2} = \frac{4(\rho_1^2-\rho_1\rho_2+\rho_2^2)^3}{(e^2-3de')^3} = \frac{27\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1-\rho_2)^2}{(e^2-3de')^3-(e^3-\frac{9}{2}dee'+\frac{27}{2}d^2d')^2}.$$

Le dénominateur du dernier terme ne diffère que par le facteur $-27\frac{d^2}{4}$ de l'invariant qui, égalé à zéro exprime le contact de f & g. $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ ne dépend que des invariants absolus géométriques indiqués plus haut.

On a immédiatement les conditions qui expriment que les éléments communs à f et g forment sur f une proportion harmonique ou équianharmonique.

On remarquera que les éléments tangents communs à f et g, considérés comme appartenant à Ψ, ont un rapport anharmonique déterminé par une équation identique à la précédente : il faut en effet pour obtenir ce rapport changer d en d'^2, e en ed', e' en $e'd$, d' en d^2 (105).

---

§. 5. Le système de 2 formes quadratiques d'espèce différente.

---

121. — Il y a intérêt, en particulier à cause des applications à la géométrique métrique dans le plan, à considérer directement

le cas où l'on donne deux formes quadratiques d'espèce différente, soit

$$f_1 = a_{x^2} \quad , \quad \Psi_1 = B_{\xi^2} \quad ,$$

les coefficients étant écrits comme précédemment.

Nous appellerons δ et δ' les discriminants de f_1 et Ψ_1 ; les formes équivalentes à f_1 et Ψ_1 seront

$$\varphi_1 = \alpha_{\xi^2} \quad , \quad g_1 = b_{x^2},$$

de sorte que, comme plus haut,

$$\alpha_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 \,, \ldots , \quad b_{11} = B_{22}\, B_{33} - B_{23}^2 \,, \ldots .$$

On a les invariants évidents :

$$\varepsilon = \alpha_{11}\, b_{11} + \ldots . + 2\,\alpha_{23}\, b_{23} + \ldots . ,$$

$$\varepsilon' = a_{11}\, B_{11} + \ldots . + 2\, a_{23}\, B_{23} + \ldots . .$$

Si l'on considère la forme $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 g_1$, du faisceau $(f_1 g_1)$, son discriminant sera

$$\lambda_1^3 \delta + \lambda_1^2 \lambda_2 \varepsilon + \lambda_1 \lambda_2^2 \varepsilon' \delta' + \lambda_2^3 \delta'^2 ,$$

et la forme équivalente :

$$\lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_1 \lambda_2 \chi_1 + \lambda_2^2 \delta' \Psi_1 \, ,$$

avec

$$\chi_1 = a_{11} \frac{\partial(\delta' \Psi_1)}{\partial b_{11}} + \ldots = b_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \ldots .$$

De même pour la forme $\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \Psi_1$, du faisceau (φ_1, Ψ_1), le discriminant est

$$\mu_1^3 \delta^2 + \mu_1^2 \mu_2 \varepsilon' \delta + \mu_1 \mu_2^2 \varepsilon + \mu_2^3 \delta' ,$$

et la forme équivalente

$$\mu_1^2 \delta f_1 + \mu_1 \mu_2 h_1 + \mu_2^2 g_1 \, ,$$

avec

$$h_1 = \alpha_{11} \frac{\partial g_1}{\partial \beta_{11}} + \dots = \beta_{11} \frac{\partial(\delta f_1)}{\partial \alpha_{11}} + \dots\dots$$

L'interprétation des différents invariants égalés à zéro est évidente d'après ce qui a été dit antérieurement. Supposons par exemple, comme il arrive dans la géométrie métrique plane, que Ψ_1 représente deux éléments (x) A et B, situés sur un élément (ξ). Γ, de sorte que $\delta' = 0$. g_1 représente Γ deux fois. $\varepsilon = 0$ est la condition pour que f touche Γ; $\varepsilon' = 0$ est la condition pour que A et B soient conjugués par rapport à f.

Les séries du faisceau (f_1, g_1) sont bitangentes à f_1 suivant les éléments communs à f_1 et à Γ; les séries du faisceau (φ_1, Ψ_1) contiennent les éléments tangents à f_1 menés par A et B.

$X_1 = 0$ représente les éléments communs à f_1 et à Γ.

$h_1 = 0$ représente la série des (x) tels que les éléments tangents à f_1 menés par (x) soient conjugués harmoniques par rapport à $(x A)$ et $(x B)$.

Chapitre IX.

Chapitre IX.

La forme bilinéaire a_{xy}.

122.— Considérons une homographie entre deux espaces coïncidants X et Y, comme au nº 92; mais supposons que les éléments correspondants soient d'espèce différente : cette hypothèse n'altère en rien les propriétés générales de l'homographie, mais conduit à des particularités intéressantes. Si (y) de (Y) correspond à (η) de X, on a entre les coordonnées de ces éléments des relations telles que :

$$\frac{\eta_1}{\lambda_{11}y_1+\lambda_{12}y_2+\lambda_{13}y_3}=\frac{\eta_2}{\lambda_{21}y_1+\lambda_{22}y_2+\lambda_{23}y_3}=\frac{\eta_3}{\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2+\lambda_{33}y_3},$$

de sorte que l'équation de (η) est :

$$f=a_{xy}=x_1(\lambda_{11}y_1+\lambda_{12}y_2+\lambda_{13}y_3)+x_2(\lambda_{21}y_1+\lambda_{22}y_2+\lambda_{23}y_3)$$
$$+x_3(\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2+\lambda_{33}y_3)=0.$$

On est ainsi amené à l'étude de la forme bilinéaire à variables de même espèce f ou a_{xy}, où nous conservons les (λ) comme coefficients.

En appelant δ le déterminant des (λ) et μ_{ij} le coefficient de λ_{ij} dans δ, on voit tout de suite que :

1º $f(x,y)=0$ est l'équation de (η) de X correspondant à (y) donné de Y.

2º $f(y,x)=0$ est l'équation de (η) de Y correspondant à (y) de X.

3° $\Psi(\xi,\eta) = \xi_1(\mu_{11}\eta_1 + \mu_{21}\eta_2 + \mu_{31}\eta_3) + \xi_2(\mu_{12}\eta_1 + \mu_{22}\eta_2 + \mu_{32}\eta_3)$
$$+ \xi_3(\mu_{13}\eta_1 + \mu_{23}\eta_2 + \mu_{33}\eta_3) = 0,$$
est l'équation de (y) de Y correspondant à (η) de X.

4° $\Psi(\eta,\xi) = 0$ est l'équation de (y) de X correspondant à (η) de Y.

On a d'ailleurs les identités

$$\Psi(\xi,\eta) = -\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \eta_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \eta_2 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \eta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta f(x,y) = -\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & x_1 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & x_2 \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aux quatre invariants $f(x,y)$, $f(y,x)$, $\Psi(\xi,\eta)$, $\Psi(\eta,\xi)$ on peut joindre $f(x,x)$, $f(y,y)$, $\Psi(\xi,\xi)$, $\Psi(\eta,\eta)$, (ξ/x), (ξ/y), (η/x), (η/y); les formes d'espèce différente $f(x,y)$ et $f(y,x)$ d'une part, $\Psi(\xi,\eta)$, $\Psi(\eta,\xi)$ donnent aussi les invariants proprement dits δ et

$$\varepsilon = \lambda_{11}\mu_{11} + \dots + \lambda_{12}\mu_{12} + \dots.$$

123. – Mais nous n'insisterons pas sur le système formé par les coefficients (λ) et les variables (x), (y), (ξ), (η); nous nous bornerons à étudier le système formé par les (λ) et les variables (x) et (ξ). On a alors les deux invariants fondamentaux $f(x,x)$, $\Psi(\xi,\xi)$, de sorte qu'on est ramené à l'étude de deux formes quadratiques d'espèce différente que nous appellerons f_1 et Ψ_1; leurs formes équivalentes φ_1 et g_1, formeront avec f_1, Ψ_1, δ, ε et (x/ξ) un système d'invariants indépendants. D'ailleurs $f_1 = 0$ représente les éléments (x) appartenant à X ou Y qui contiennent leurs correspondants; $\Psi_1 = 0$ représente les éléments (ξ) appartenant à X ou à Y qui contiennent leurs correspondants.

Cherchons les éléments (x) qui ont même correspondant quand

on les considère comme appartenant soit à X soit à Y.

On doit avoir

$$\frac{\lambda_{11}x_1+\lambda_{12}x_2+\lambda_{13}x_3}{\lambda_{11}x_1+\lambda_{21}x_2+\lambda_{31}x_3}=\frac{\lambda_{21}x_1+\lambda_{22}x_2+\lambda_{23}x_3}{\lambda_{12}x_1+\lambda_{22}x_2+\lambda_{32}x_3}=\frac{\lambda_{31}x_1+\lambda_{32}x_2+\lambda_{33}x_3}{\lambda_{13}x_1+\lambda_{23}x_2+\lambda_{33}x_3},$$

et si ρ est la valeur commune de ces rapports, on a pour déterminer ρ l'équation

$$\varphi(\rho)=\begin{vmatrix}\lambda_{11}(1-\rho) & \lambda_{12}-\lambda_{21}\rho & \lambda_{13}-\lambda_{31}\rho\\ \lambda_{21}-\lambda_{12}\rho & \lambda_{22}(1-\rho) & \lambda_{23}-\lambda_{32}\rho\\ \lambda_{31}-\lambda_{13}\rho & \lambda_{32}-\lambda_{23}\rho & \lambda_{33}(1-\rho)\end{vmatrix}=0;$$

d'ailleurs

$$\varphi(\rho)=(1-\rho)(\delta\rho^2+(\delta-\varepsilon)\rho+\delta).$$

De même, pour déterminer les éléments (ξ) qui ont même correspondant quand on les considère comme appartenant soit à X soit à Y, on a

$$\frac{\mu_{11}\xi_1+\mu_{12}\xi_2+\mu_{13}\xi_3}{\mu_{11}\xi_1+\mu_{21}\xi_2+\mu_{31}\xi_3}=\frac{\mu_{21}\xi_1+\mu_{22}\xi_2+\mu_{23}\xi_3}{\mu_{12}\xi_1+\mu_{22}\xi_2+\mu_{32}\xi_3}=\frac{\mu_{31}\xi_1+\mu_{32}\xi_2+\mu_{33}\xi_3}{\mu_{13}\xi_1+\mu_{23}\xi_2+\mu_{33}\xi_3},$$

et la valeur commune de ces rapports est encore une racine de l'équation $\varphi(\rho)=0$.

124. _ Plaçons nous d'abord dans le cas général où l'équation $\varphi(\rho)=0$ a trois racines distinctes $1, \rho_2, \rho_3$, et où δ n'est pas nul.

A $\rho=1$ on peut faire correspondre O_1 ; à $\rho=\rho_2$, O_2 ; à $\rho=\rho_3$, O_3.

Alors il faut avoir successivement

$$\lambda_{12}=\lambda_{21},\ \lambda_{13}=\lambda_{31},$$
$$\lambda_{12}-\lambda_{21}\rho_2=0,\ \lambda_{22}=0,\ \lambda_{32}-\lambda_{23}\rho_2=0,$$
$$\lambda_{13}-\lambda_{31}\rho_3=0,\ \lambda_{23}-\lambda_{32}\rho_3=0,\ \lambda_{33}=0;$$

d'où

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0\,, \quad \lambda_{23}^2 \neq \lambda_{32}^2\,, \quad \lambda_{11} \neq 0, \quad \lambda_{23}\lambda_{32} \neq 0.$$

et par suite

$$f = \lambda_{11}\, x_1 y_1 + \lambda_{23}\, x_2 y_3 + \lambda_{32}\, x_3 y_2\,,$$

d'où

$$\Psi(\xi, \eta) = -\lambda_{23}\lambda_{32}\,\xi_1\eta_1 - \lambda_{11}\lambda_{23}\,\xi_2\eta_3 - \lambda_{11}\lambda_{32}\,\xi_3\eta_2\,.$$

A $\rho = 1$ correspond aussi Ω_1 ; à $\rho = \rho_2$, Ω_3 ; à $\rho = \rho_3$, Ω_2.

Les couples O_1, Ω_1 ; O_2, Ω_3 ; O_3, Ω_2 sont correspondants.

On a

$$f_1 = \lambda_{11} x_1^2 + (\lambda_{23} + \lambda_{32})\, x_2 x_3\,,$$

$$\Psi_1 = -\lambda_{23}\lambda_{32}\,\xi_1^2 - \lambda_{11}(\lambda_{23} + \lambda_{32})\,\xi_2\xi_3\,,$$

$$\delta = -\lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32}\,, \quad \varepsilon = -\lambda_{11}(\lambda_{23}^2 + \lambda_{23}\lambda_{32} + \lambda_{32}^2),$$

$$\varphi_1 = -\tfrac{1}{4}(\lambda_{23} + \lambda_{32})^2\,\xi_1^2 - \lambda_{11}(\lambda_{23} + \lambda_{32})\,\xi_2\xi_3\,,$$

$$g_1 = -\tfrac{1}{4}\lambda_{11}^2(\lambda_{23} + \lambda_{32})^2\,x_1^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32}(\lambda_{23} + \lambda_{32})\,x_2 x_3\,.$$

On voit que f et g sont deux séries bitangentes en O_2 et O_3, avec Ω_3 et Ω_2 pour éléments tangents communs.

Il est facile de calculer en fonction de δ et ε les invariants proprement dits de f_1, Ψ_1, &c.

On remarquera que $\varphi_1 - \Psi_1 = 0$ représente deux fois O_1 ; $4\delta\varphi_1 - (\varepsilon+\delta)\Psi_1 = 0$ représente O_2 et O_3. De même, $g_1 - \delta f_1 = 0$ représente Ω_1 deux fois ; $4g_1 - (\varepsilon+\delta) f_1 = 0$ représente Ω_2 et Ω_3. On en déduirait facilement la façon de ramener f à la forme canonique.

125. — Soient (y) et (z) deux éléments quelconques ; si on les considère comme appartenant successivement à Y et à X, chacun d'eux a deux correspondants (η) et (η'), (ζ) et (ζ').

Les équations de ces quatre éléments sont respectivement

$\eta)\ \lambda_{11} x_1 y_1 + \lambda_{23} x_2 y_3 + \lambda_{32} x_3 y_2 = 0, \qquad \zeta)\ \lambda_{11} x_1 z_1 + \lambda_{23} x_2 z_3 + \lambda_{32} x_3 z_2 = 0,$

$\eta')\ \lambda_{11} x_1 y_1 + \lambda_{32} x_2 y_3 + \lambda_{23} x_3 y_2 = 0, \qquad \zeta_1)\ \lambda_{11} x_1 z_1 + \lambda_{32} x_2 z_3 + \lambda_{32} x_3 \zeta_2 = 0.$

On constate que si (y) et (z) appartiennent à une même série du faisceau (f_1, g_1), et seulement dans ce cas, les éléments O_1, $(\eta\zeta)$ et $(\eta'\zeta)$ appartiennent à un même faisceau.

Une proposition analogue a lieu pour les éléments d'espèce opposée.

Supposons que l'on connaisse les éléments fondamentaux O_1, O_2, O_3 et un couple d'éléments correspondants (z) et (ζ) appartenant respectivement à f_1 et Ψ_1; si (y) est pris sur f_1, les éléments (η) et (η') sont les éléments tangents à g_1 menés par (y); la proposition précédente permettra de les distinguer facilement.

Si (y) est un élément quelconque on trouvera facilement son correspondant en se servant des éléments tangents menés par (y) à g_1, éléments auxquels ce qui précède peut s'appliquer, avec les modifications convenables.

On résoudra facilement la question suivante qu'il suffit d'indiquer: à une série quadratique k de X correspond une série quadratique χ de Y; les deux séries k et χ peuvent-elles être équivalentes?

126. – Examinons maintenant les différents cas particuliers possibles, en excluant toujours l'hypothèse $\delta = 0$ à laquelle correspondent des homographies singulières peu intéressantes.

1° ρ_2 et ρ_3 sont égaux, et différents de 1; alors leur valeur

commune est -1 et l'on a $\delta+\varepsilon=0$. En outre cette racine double -1 n'annule pas tous les mineurs du déterminant $\varphi(\rho)$.

En faisant correspondre O_1 à $\rho=1$, et O_2 à $\rho=-1$, on a comme plus haut

$$\lambda_{12}=\lambda_{21}=\lambda_{22}=0,\quad \lambda_{13}=\lambda_{31},\ \lambda_{23}+\lambda_{32}=0,\quad \delta=\lambda_{11}\lambda_{23}^2\neq 0,$$

$$\lambda_{11}\lambda_{33}-\lambda_{13}^2\neq 0.$$

On a donc

$$f_1=\lambda_{11}x_1^2+2\lambda_{13}x_1x_3+\lambda_{33}x_3^2,$$

et par suite, on peut disposer de Ω_1 de façon que $\lambda_{13}=\lambda_{31}=0$.

Alors

$$f=\lambda_{11}x_1y_1+\lambda_{33}x_3y_3+\lambda_{23}(x_2y_3-x_3y_2);$$

à $\rho=1$ et $\rho=-1$ correspondent encore Ω_1 et Ω_3; O_1 et Ω_1 sont deux couples correspondants, ainsi que O_2 & Ω_3.

On a

$$f_1=\lambda_{11}x_1^2+\lambda_{33}x_3^2,$$

$$\psi_1=\lambda_{23}^2\xi_1^2+\lambda_{11}\lambda_{33}\xi_2^2.$$

Ces deux séries se décomposent d'une façon facile à interpréter.

2°. On conserve les hypothèses précédentes, sauf que $\rho=-1$ annule tous les mineurs de $\varphi(\rho)$.

Comme plus haut, on verra que l'on peut prendre

$$f=\lambda_{11}x_1y_1+\lambda_{23}(x_2y_3-x_3y_2)\qquad(\lambda_{11}\lambda_{23}\neq 0.$$

On a par suite

$$f_1=\lambda_{11}x_1^2,\quad \psi_1=\lambda_{23}^2\xi_1^2.$$

à $\rho=1$ correspondent O_1 et Ω_1; à $\rho=-1$ correspondent tous lea éléments de Ω_1 et de O_1; si M est quelconque sur Ω_1, M et O_1M sont des éléments correspondants.

3°. L'équation $\varphi(\rho)=0$ admet $\rho=1$ comme racine triple, et cette racine n'annule pas tous les mineurs de $\varphi(\rho)$.

On a alors $\varepsilon = 3\delta$.

A $\rho=1$ faisons correspondre O_1 ; alors $\lambda_{12}=\lambda_{21}$, $\lambda_{13}=\lambda_{31}$; la racine étant triple, on a $\lambda_{11}(\lambda_{23}-\lambda_{32})=0$; mais on ne peut prendre $\lambda_{23}=\lambda_{32}$ à cause de l'hypothèse faite. Donc $\lambda_{11}=0$. Sans insister davantage, on trouvera que les séries f et g sont surosculatrices en O_1 ; si Ω_2 est l'élément tangent commun, on a $\lambda_{12}=\lambda_{21}=0$.

On a ici un cas limite du cas général.

4°. On garde les hypothèses précédentes, sauf que la racine triple annule tous les mineurs de $\varphi(\rho)$.

Raisonnant comme plus haut, on voit que si O_1 correspond à $\rho=1$, on a $\lambda_{12}=\lambda_{21}$, $\lambda_{13}=\lambda_{31}$, et en outre $\lambda_{23}=\lambda_{32}$. Par suite $\rho=1$ annule tous les éléments de $\varphi(\rho)$ et il y a <u>involution</u>, c'est-à-dire que tout élément a même correspondant, qu'on le considère comme appartenant à X ou à Y.

f_1 et g_1 coïncident, et l'on voit que les éléments correspondants sont pôle et polaire par rapport à f_1. Nous avons déjà eu des exemples de ce cas précédemment.

Remarquons enfin que δ n'étant pas nul, f_1 ne peut être nul identiquement.

Table des Matières



